Schnittpunkt von Gerade und Ebene

1.Fall: Für die Berechnung des Schnittpunktes einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{b} + t \cdot \vec{u}$ in **Parameterform** und einer Ebene $E: n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z = d$ in **Koordinatenform** gilt:

$g \text{ in } E$ mit $g: \vec{x} = \vec{b} + t \cdot \vec{u}$ = $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ = $\begin{aligned} x &= b_x + u_x \cdot t \\ y &= b_y + u_y \cdot t \\ z &= b_z + u_z \cdot t \end{aligned}$

liefert die **Gleichung** $E: n_x \cdot (b_x + u_x \cdot t) + n_y \cdot (b_y + u_y \cdot t) + n_z \cdot (b_z + u_z \cdot t) = d$

2.Fall: Für die Berechnung des Schnittpunktes einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{b} + t \cdot \vec{u}$ in **Parameterform** und einer Ebene $E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$ in **Parameterform** gilt:

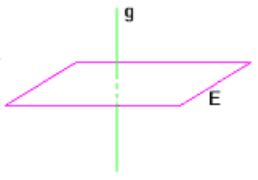
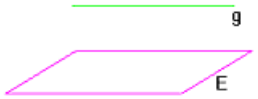
$E = g$ => $\vec{a} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} = \vec{b} + t \cdot \vec{u}$

Gleichungssystem

$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$ => $\begin{aligned} a_x + v_x r + w_x s &= b_x + u_x t \\ a_y + v_y r + w_y s &= b_y + u_y t \\ a_z + v_z r + w_z s &= b_z + u_z t \end{aligned}$

g	= Gerade g
E	= Ebene E
$\vec{a}, \vec{b}$	= Stützvektoren
$\vec{v}; \vec{w}, \vec{u}$	= Richtungsvektoren
$r; s, t$	= Parameter
$?_x; ?_y; ?_z$	= Komponenten von diversen Vektoren

Die Lösung der Gleichung im 1. Fall bzw. des Gleichungssystems im 2. Fall lässt folgende Interpretationen zu:

1.Fall: $t = ...$ 2.Fall: $r = ...$, $s = ...$, $t = ...$	Eindeutig lösbar mit genau einer Lösung für den oder die Parameter besagt, dass Gerade und Ebene einen Schnittpunkt haben. Durch Einsetzen von t in g oder r und s in E kann dieser bestimmt werden.	
Beide Fälle $m = n \quad mit \quad m \neq n$	Nicht lösbar besagt, dass Gerade und Ebene keinen Schnittpunkt haben und demzufolge echt parallel zueinander sind	
Beide Fälle $m = m$	Nicht eindeutig lösbar mit unendlich vielen Lösungen für die Parameter besagt, dass Gerade und Ebene identisch parallel sind, die Gerade liegt also in der Ebene	