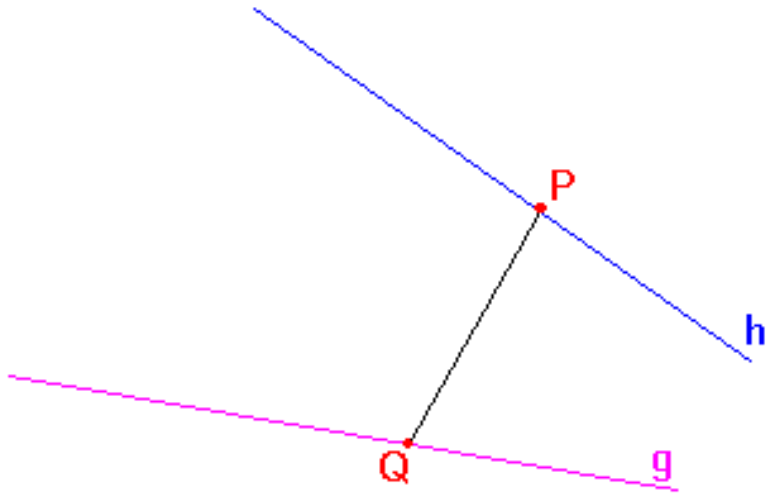
5.4. Abstand von 2 windschiefen Geraden

Gegeben sind 2 Geraden g und h in Parameterform. Diese könnten allgemein so aussehen:

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} \qquad \text{und} \qquad h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{w}$$

Wenn man den Zusammenhang grafisch darstellt, dann erhält man:



In der Skizze siehst du die beiden Geraden g und h, die sich übrigens nicht schneiden, da sie ja windschief sind, und die beiden Lotfußpunkte P und Q. Diese entstehen, wenn man die beiden windschiefen Geraden mit einer Linie verbindet, wobei diese Linie auf beiden Geraden senkrecht steht, denn dann stellt diese Linie die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Geraden dar.

Vorüberlegung: Wie gerade gesagt wurde, ist die Verbindung zwischen g und h eine Linie, die auf den beiden Geraden senkrecht steht, und sie ist deswegen die kürzeste Verbindung zwischen den windschiefen Geraden. Wenn wir also die Länge dieser Verbindungslinie wüssten, dann hätten wir auch den Abstand der beiden windschiefen Geraden. Die Verbindungslinie berührt die Geraden g und h in den so genannten Lotfußpunkten P und Q. Wenn wir die Koordinaten dieser beiden Punkte wüssten, dann könnten wir den Vektor PQ bestimmen und die Lösung wäre dann die Länge, also der Betrag, dieses Vektors PQ.

Falls dich die nächsten 2 Seiten zu sehr verwirren, dann gehe gleich zum Beispiel auf Seite 108

Fangen wir an: Gesucht ist ja folgender Vektor $\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$

Der Punkt Q ist ein Punkt der Geraden g und der Punkt P ist ein Punkt der Geraden h, also können wir jeweils den Vektor x in den Parameterformen der Geraden durch die Ortsvektoren der Punkte ersetzen.

$$g : \vec{q} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} \qquad \text{und} \qquad h : \vec{p} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{w}$$

Das Linke bedeutet eigentlich nur, dass man den Punkt Q auf der Geraden g erreicht, indem man für den Parameter λ einen noch zu findenden Wert einsetzt. Das Rechte bedeutet dementsprechend dann auch nur, dass man den Punkt P auf der Geraden h erreicht, indem man für den Parameter μ einen ebenfalls noch zu findenden Wert einsetzt.

Wenn man nun diese beiden Informationen in die Gleichung ganz oben auf dieser Seite einsetzt, dann erhält man durch einige Umformungen:

$$\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$$
$$\vec{PQ} = \left(\vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}\right) - \left(\vec{b} + \mu \cdot \vec{w}\right)$$
$$\vec{PQ} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} - \vec{b} - \mu \cdot \vec{w}$$
$$\vec{PQ} = \left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \lambda \cdot \vec{v} - \mu \cdot \vec{w}$$

Dieser Ausdruck stellt also den Vektor PQ dar. Dieser Vektor steht nun senkrecht auf den beiden Geraden g und h, also verläuft der Vektor senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren v und w der Geraden. Für Vektoren, die senkrecht zueinander stehen, gilt, dass das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergibt. Wir erhalten somit folgende 2 Ansätze:

$$\vec{PQ} * \vec{v} = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{PQ} * \vec{w} = 0$$

Setzen wir für den Vektor PQ den oben ermittelten Ausdruck ein und lösen dann die eckige Klammer, also das Skalarprodukt, auf dann erhalten wir:

LINKS	**RECHTS**
$\left[\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \lambda \cdot \vec{v} - \mu \cdot \vec{w}\right] * \vec{v} = 0$	$\left[\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \lambda \cdot \vec{v} - \mu \cdot \vec{w}\right] * \vec{w} = 0$
$\vec{v} * \left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{v} * \left(\lambda \cdot \vec{v}\right) - \vec{v} * \left(\mu \cdot \vec{w}\right) = 0$	$\vec{w} * \left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{w} * \left(\lambda \cdot \vec{v}\right) - \vec{w} * \left(\mu \cdot \vec{w}\right) = 0$

Schreiben wir die Vektoren mit Komponenten, dann erhalten wir folgendes, wobei wir zunächst die linke Seite weiter verwenden und anschließend dasselbe mit der rechten Seite erledigen.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \left[\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \left[\mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}\right] = 0$$

Dieser Ausdruck wird zunächst ein wenig umgeformt, damit die eckigen Klammern wegfallen

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mu \cdot w_1 \\ \mu \cdot w_2 \\ \mu \cdot w_3 \end{pmatrix} = 0$$

Jetzt wird 3mal das Skalaprodukt angewendet und wir erhalten

$$v_1 \cdot (a_1 - b_1) + v_2 \cdot (a_2 - b_2) + v_3 \cdot (a_3 - b_3) + \lambda \cdot (v_1)^2 + \lambda \cdot (v_2)^2 + \lambda \cdot (v_3)^2 - \mu v_1 w_1 - \mu v_2 w_2 - \mu v_3 w_3 = 0$$

Wir erhalten also eine Gleichung mit 2 Unbekannten, nämlich den beiden Parametern λ und μ, die wir später noch mal benötigen werden.

Diese Gleichung hatten wir ja aus dem Ansatz Links erhalten. Jetzt kümmern wir uns um den Ansatz von der vorigen Seite rechts, und machen mit ihm das Gleiche wie wir eben mit dem Ansatz auf der linken Seite gemacht haben. Schau dir den Ansatz noch mal genau an.

$$\vec{w} * \left(\vec{a} - \vec{b}\right) + \vec{w} * (\lambda \cdot \vec{v}) - \vec{w} * (\mu \cdot \vec{w}) = 0$$

In diesem Ausdruck werden wir jetzt auch die Vektoren mit Komponenten schreiben

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} * \left[\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} * \left[\mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

Dieser Ausdruck wird auch ein wenig umgeformt, damit die eckigen Klammern wegfallen

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \mu \cdot w_1 \\ \mu \cdot w_2 \\ \mu \cdot w_3 \end{pmatrix} = 0$$

Jetzt wird auch wieder 3mal das Skalaprodukt angewendet und wir erhalten

$$w_1 \cdot (a_1 - b_1) + w_2 \cdot (a_2 - b_2) + w_3 \cdot (a_3 - b_3) + \lambda v_1 w_1 + \lambda v_2 w_2 + \lambda v_3 w_3 - \mu \cdot (w_1)^2 - \mu \cdot (w_2)^2 - \mu \cdot (w_3)^2 = 0$$

Wir erhalten also wieder eine Gleichung mit 2 Unbekannten, nämlich den beiden Parametern λ und μ, die wir später auch noch mal benötigen werden.

Ich halte noch mal fest, dass wir jetzt 2 Gleichungen mit 2 Variablen, nämlich den beiden Parametern λ und μ, haben. Diese beiden Gleichungen bilden ein Lineares Gleichungssystem, welches man z.B. mit dem Einsetzungsverfahren lösen kann. Als Lösung erhalten wir Zahlen für die Parameter λ und μ, die wir in die entsprechenden Parameterformen einsetzen. Dadurch erhalten wir die Koordinaten der Lotfußpunkte P und Q. Jetzt kann man den PQ Vektor berechnen (Pfeilende minus Pfeilanfang) und anschließend die Länge des Vektors PQ, indem man den Betrag rechnet. Fertig.

Auf der nächsten Seite wird zum besseren Verständnis ein Beispiel vorgerechnet

Beispiel: Gegeben sind die beiden windschiefen Geraden g und h. Bestimme deren Abstand!

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Grundprinzip (evtl. Skizze 3 Seiten früher (S.105) hinzuziehen): Zwischen den beiden windschiefen Geraden existiert eine kürzeste Verbindungslinie, die auf beiden Geraden senkrecht steht. Diese Verbindungslinie berührt die beiden Geraden jeweils in den Lotfußpunkten P und Q. Diese gilt es zu bestimmen und dann kann man die Verbindungslinie als den Vektor PQ auffassen. Diesen bestimmen und dessen Betrag bestimmen und schon hat man den Abstand der beiden windschiefen Geraden.

Also, wie gerade beschrieben ist das Hauptziel die Bestimmung des Vektors PQ, für den wir die Koordinaten der Lotfußpunkte P und Q benötigen, also folgender allgemeiner Ansatz:

$$\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$$

Der Punkt Q liegt irgendwo auf der Geraden g und der Punkt P liegt irgendwo auf der Geraden h (könnte auch genau anders herum sein). Das würde bedeuten, dass man den Punkt Q der Geraden g erreicht, wenn man einen noch zu findenden Wert für den Parameter r der Geraden g einsetzt. Weiterhin bedeutet das, dass man den Punkt P der Geraden h erreicht, wenn man einen noch zu findenden Wert für den Parameter s der Geraden h einsetzt. Wir können deshalb die Vektoren x in den Geraden jeweils durch die Vektoren q und p ersetzen und erhalten folgende Ansätze:

$$g: \vec{q} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h: \vec{p} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Den Vektor q und den Vektor p des vorigen Kästchens setzen wir in den Vektor PQ ein und erhalten:

$$\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p} \quad => \quad \vec{PQ} = \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] - \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad => \quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -15 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um den Ausdruck ganz rechts zu erhalten, muss man den mittleren Ausdruck vereinfachen. Dabei muss man das Minus vor der zweiten eckigen Klammer auf den dritten und vierten Vektor wirken lassen (Vorzeichen ändern sich) und man kann dann anschießend den ersten und dritten Vektor zusammenfassen, da bei diesen beiden Vektoren kein Parameter dabei steht. Wir erhalten somit den Ausdruck ganz rechts für den Vektor PQ, den wir in 2 Ansätzen auf der folgenden Seite benötigen.

Wie bereits erwähnt verläuft der Vektor PQ senkrecht zwischen den beiden windschiefen Geraden g und h. Bei dem Stichwort senkrecht denken wir doch sofort an das Skalarprodukt.

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt nämlich Null, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Der Vektor PQ steht senkrecht auf den beiden Geraden und deshalb ergibt das Skalarprodukt des Vektors PQ mit den jeweiligen Richtungsvektoren der Geraden Null. Wir erhalten folgende Ansätze:

$$\vec{PQ} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{PQ} * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Wenn wir für den Vektor PQ den Ausdruck von der vorigen Seite einsetzen, erhalten wir:

Ansatz I **Ansatz II**

$$\vec{PQ} = \left[\begin{pmatrix} -15 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{PQ} = \left[\begin{pmatrix} -15 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Diese Ansätze müssen wir jetzt auflösen und nicht erschrecken, denn eigentlich muss man einfach nur 3mal das Skalarprodukt (Stichwort: „das mal das plus das mal das“) anwenden. Falls du nicht mehr weißt, wie man das Skalarprodukt (S.17) anwendet, dann schau doch im gleichnamigen Kapitel nach. Wir werden jetzt also jeden Vektor innerhalb der eckigen Klammer mit dem Vektor dahinter multiplizieren (Skalarprodukt).

Kümmern wir uns zunächst um den linken **Ansatz I:**

$$\begin{pmatrix} -15 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(-15) \cdot 1 + (-4) \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 1r \cdot 1 + 2r \cdot 2 + 3r \cdot 3 + 1s \cdot 1 + (-2s) \cdot 2 + 0s \cdot 3 = 0$$

$$-15 - 8 + 15 + r + 4r + 9r + s - 4s + 0 = -15$$

$$-8 + 14r - 3s = 0 \,\big|\, +8$$

$$14r - 3s = 8$$

Auf der nächsten Seite vereinfachen wir den rechten Ansatz II

Kümmern wir uns jetzt um den rechten **Ansatz II:**

$$\begin{pmatrix}-15\\-4\\5\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$(-15)\cdot(-1)+(-4)\cdot 2+5\cdot 0+1r\cdot(-1)+2r\cdot 2+3r\cdot 0+1s\cdot(-1)+(-2s)\cdot 2+0s\cdot 0=0$$

$$15-8+0-r+4r+0-s-4s+0=-15$$

$$7+3r-5s=0 \,|\, -7$$

$$3r-5s=-7$$

Schreiben wir das Ergebnis der einzelnen Ansätze noch mal auf:

Ansatz I: 14r – 3s = 8
Ansatz II: 3r - 5s = -7

Wir erhalten also ein kleines Lineares Gleichungssystem, welches wir z.B. mit dem Einsetzungsverfahren oder dem Additionsverfahren lösen können. Mit welchem Verfahren auch immer, als Lösung muss r = 1 und s = 2 heraus kommen.

Die Parameter r und s setzen wir nun jeweils in die entsprechende Parameterform der Geraden ein und erhalten dann die Koordinaten der Lotfußpunkte:

r in g liefert den Lotfußpunkt Q, also:

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}-5\\4\\9\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad => \quad \vec{q}=\begin{pmatrix}-5\\4\\9\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\4\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\6\\12\end{pmatrix} \quad => \quad Q(-4/6/12)$$

s in h liefert den Lotfußpunkt P, also:

$$h:\vec{x}=\begin{pmatrix}10\\8\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \quad => \quad \vec{p}=\begin{pmatrix}10\\8\\4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\8\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\12\\4\end{pmatrix} \quad => \quad P(8/12/4)$$

Die Lotfußpunkte haben also die Koordinaten Q (-4 / 6 / 12) und P (8 / 12 / 4). Aus diesen Lotfußpunkten können wir jetzt den Vektor PQ bestimmen.

$$\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p} \quad => \quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix} \quad => \quad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Abschließend berechnen wir jetzt nur noch den Betrag vom Vektor PQ und erhalten damit die Länge des Vektors PQ und damit den Abstand der beiden windschiefen Geraden.

$$\left| \vec{PQ} \right| = \left| \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-12)^2 + (-6)^2 + 8^2} = \sqrt{144 + 36 + 64} = \sqrt{244} = 15{,}6205$$

Der Abstand der beiden windschiefen Geraden beträgt also 15,6205 Einheiten.