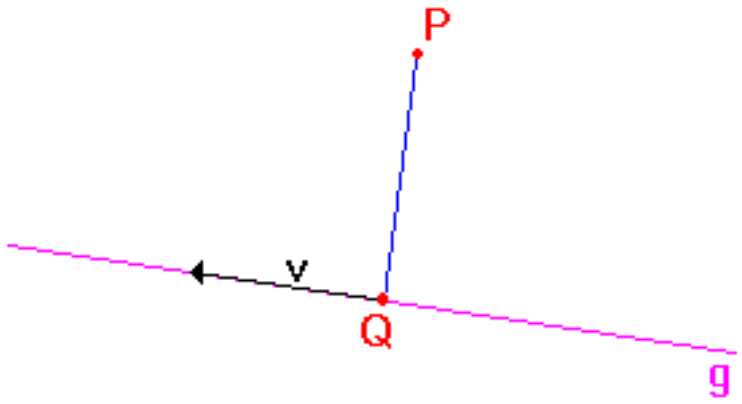
5.3. Abstand Punkt zu Gerade

Gegeben ist die Gerade g in Parameterform und die Koordinaten des Punktes P



In der obigen Skizze siehst du die Gerade g mit ihrem Richtungsvektor v, und dem Punkt P. Zieht man vom Punkt aus eine senkrechte Linie (kürzeste Verbindung zwischen dem Punkt und der Geraden) zur Gerade, dann erhält man an der Stelle, an der die senkrechte Linie die Gerade berührt, den Lotfußpunkt Q.

Vorüberlegung: Gesucht ist ja der Abstand des Punktes P von der Geraden g. Wenn wir uns obige Skizze ansehen, dann ist dieser Abstand ja genau die Länge, also der Betrag des Vektors PQ. Wir müssen also den Vektor PQ bestimmen, um von diesem dann den Betrag zu berechnen. Wie man nun den Vektor PQ bestimmt, sehen wir jetzt.

Falls dich die nächsten Seiten zu stark verwirren, dann gehe gleich zum Beispiel auf Seite 103, aber versuch bitte erst mal die allgemeine Darstellung im Folgenden zu verstehen:

Gegeben sind ja, wie gesagt, die Gerade g in Parameterform und die Koordinaten von Punkt P und damit auch die Komponenten des Vektors p.

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} \qquad \text{und} \qquad P(p_1 / p_2 / p_3) \;\Rightarrow\; \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Da der Punkt Q auf der Geraden g liegt, kann man den Vektor x durch den Vektor q ersetzen, denn wenn man für den Parameter λ einen noch zu bestimmenden Wert einsetzt, dann gelangt man zu dem Punkt Q der Geraden g.

$$g: \vec{q} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}$$

Stellen wir nun den Vektor PQ her: Im ersten Schritt setzen wir nur Pfeilende minus Pfeilanfang um und setzen dann für den Vektor q, gemäß der Gleichung vor diesem Absatz, die rechte Seite der Parameterform der Geraden ein:

$$\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$$

$$\vec{PQ} = [\vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}] - \vec{p}$$

$$\vec{PQ} = (\vec{a} - \vec{p}) + \lambda \cdot \vec{v}$$

Die letzte Gleichung erhalten wir, wenn wir Vektor a und Vektor p verrechnen, um einen etwas einfacheren Ausdruck zu erhalten.

Wenn wir noch mal einen Blick in die Skizze auf der vorigen Seite werfen, dann sehen wir, dass der Vektor PQ ja senkrecht zu dem Richtungsvektor v der Geraden verläuft und da das Skalarprodukt von zwei senkrecht zueinander stehenden Vektoren gleich Null ergibt, folgt daraus:

$$\vec{PQ} * \vec{v} = 0$$

Ersetzen wir den Vektor PQ durch obigen Ausdruck

$$[(\vec{a} - \vec{p}) + \lambda \cdot \vec{v}] * \vec{v} = 0$$

Durch ausmultiplizieren der eckigen Klammer erhalten wir

$$\vec{v} * (\vec{a} - \vec{p}) + \vec{v} * (\lambda \cdot \vec{v}) = 0$$

Schreiben wir die Vektoren mit Komponenten und vereinfachen ein wenig

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \left[\lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 - p_1 \\ a_2 - p_2 \\ a_3 - p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix} = 0$$

Jetzt brauchen wir nur noch 2-mal das Skalarprodukt bilden

$$v_1 \cdot (a_1 - p\ ) + v_2 \cdot (a_2 - p_2) + v_3 \cdot (a_3 - p_3) + \lambda \cdot (v_1)^2 + \lambda \cdot (v_2)^2 + \lambda \cdot (v_3)^2 = 0$$

Diese Gleichung lösen wir nach dem Parameter λ auf und wenn wir diesen in die Parameterform der Geraden g einsetzen, dann erhalten wir den Ortsvektor des Lotfußpunktes Q.

Wir haben nun den Vektor q, können damit den Vektor PQ durch Vektor q minus Vektor p berechnen und sind somit schon fast am Ziel. Da wir jetzt den Vektor PQ haben, bestimmen wir von diesem den Betrag und sind fertig.

Auf der nächsten Seite wird zum besseren Verständnis ein Beispiel vorgerechnet

Beispiel: Gegeben ist die Parameterform der Geraden g und die Koordinaten des Punktes P. Bestimme den Abstand des Punktes P von der Geraden g

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P\ (12 / 5 / 2) \quad => \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Grundprinzip: den Lotfußpunkt Q bestimmen, dann den Vektor PQ und zum Schluss den Betrag des Vektors PQ berechnen, also die Länge des Vektors PQ und damit den Abstand.

Der Lotfußpunkt Q ist ja ein Punkt der Geraden g und somit können wir in der Parameterform der Geraden den Vektor x durch den Vektor q ersetzen, denn wenn wir für den Parameter r einen noch zu bestimmenden Wert in die Gerade g einsetzen, dann gelangen wir zu dem Lotfußpunkt Q:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad => \qquad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Als nächstes setzen wir den Vektor q und den Vektor p in folgenden Ansatz ein (Stichwort hinten minus vorne):

$$\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p} \qquad => \qquad \vec{PQ} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad => \qquad \vec{PQ} = \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Den Stützvektor (vorne) haben wir mit dem Vektor p (hinten) verrechnet und kommen damit zu der Gleichung ganz rechts.

Jetzt kommen wir zu einem Ansatz mit dem Skalarprodukt, wobei zur Erinnerung dieses ja Null ergibt, wenn 2 Vektoren senkrecht zueinander sind. Wir bilden das Skalarprodukt von Vektor PQ und Vektor v (Richtungsvektor der Geraden) und wie man in der Skizze 2 Seiten früher (S.101) erkennen kann, sind diese beiden Vektoren senkrecht zueinander und deswegen erhalten wir folgenden Ansatz, in den wir die Vektoren auch gleich einsetzen:

$$\vec{PQ} * \vec{v} = 0 \qquad => \qquad \left[\begin{pmatrix} -11 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$$

Als nächstes müssen wir das Skalarprodukt (S.17) auflösen. Falls du nicht mehr genau weißt, wie das geht, schau im gleichnamigen Kapitel nach. Hier soll nur das Stichwort „das mal das plus das mal das“ genügen. Das Skalarprodukt wird zweimal angewendet. Der Vektor hinter der eckigen Klammer mit dem ersten Vektor in der eckigen Klammer und dann noch der Vektor hinter der eckigen Klammer mit dem zweiten Vektor in der eckigen Klammer. Wir erhalten dann:

$$(-11) \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 2r \cdot 2 + 4r \cdot 4 + 6r \cdot 6 = 0$$

Die Gleichung von der vorigen Seite habe ich hier noch mal übertragen. Diese Gleichung vereinfachen wir und lösen sie nach dem Parameter r auf.

$$\begin{aligned}(-11)\cdot 2+(-3)\cdot 4+1\cdot 6+2r\cdot 2+4r\cdot 4+6r\cdot 6&=0\\ -22-12+6+4r+16r+36r&=0\\ -28+56r&=0\,\big|+28\\ 56r&=28\,\big|:56\\ r&=0{,}5\end{aligned}$$

Wenn wir nun den Parameter r = 0,5 in die Parameterform der Geraden g einsetzen, gelangen wir zu dem Lotfußpunkt Q, also r in g:

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad \vec{q}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+0{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

Aus den Komponenten des Vektors q können wir die Koordinaten des Lotfußpunktes Q ablesen, wir erhalten dann Q (2 / 4 / 6). Es ist hier übrigens nur Zufall, dass der Vektor q identisch mit dem Richtungsvektor v der Geraden g ist.

Jetzt sind wir in der Lage, den Vektor PQ gemäß „hinten minus vorne“ zu bestimmen.

$$\vec{PQ}=\vec{q}-\vec{p}\qquad\Rightarrow\qquad \vec{PQ}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Zuletzt brauchen wir jetzt nur noch den Betrag des Vektors PQ zu bestimmen (Stichwort: Komponenten quadrieren, zusammenzählen und dann die Wurzel ziehen). Falls du nicht mehr genau weißt, wie das geht, schau in dem Kapitel „Betrag von Vektoren“ (S.21) nach.

$$\left|\vec{PQ}\right|=\left|\begin{pmatrix}-10\\-1\\4\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-10)^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{100+1+16}=\sqrt{117}\approx 10{,}82$$

Da der Betrag eines Vektors ja nichts anderes ist, als dessen Länge, haben wir jetzt die Länge des Vektors PQ und somit auch unser eigentliches Ziel erreicht, nämlich den Abstand des Punktes P von der Geraden g.