5.7. Abstandsberechnungen mit Hilfe der Normalenform

Im Kapitel „Darstellungsformen von Ebenen“ (S.45) ist dir wahrscheinlich schon mal Normalenform über den Weg gelaufen. Es existiert die Allgemeine Normalenform (ANF) und die Hesse Normalenform (HNF). Diese sehen wir hier noch mal

$$HNF: \vec{n}_0 * (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \qquad mit \qquad \vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n}$$

Aus dieser Normalenform (HNF) kann man folgende Abstandsformel weiterentwickeln, mit der man den Abstand d eines Punktes von einer Geraden bzw. Ebenen bestimmen kann.

$$d = \frac{\vec{n} * \vec{x} - \vec{n} * \vec{a}}{|\vec{n}|}$$

mit

$\vec{n}$ = Normalenvektor der Geraden/Ebenen

$\vec{a}$ = Ortsvektors eines Punktes der Gerade/Ebene

$\vec{x}$ = Ortsvektor des Punktes, dessen Abstand gesucht ist

Will man den Abstand eines Punktes berechnen, so setzt man die Koordinaten des Punktes für die x-Komponenten in obiger Formel ein. Diese Formel gilt gleichzeitig für den Abstand d eines Punktes von einer Geraden und auch von einer Ebene. Ursache dafür ist, dass die ursprüngliche Normalenform auch entweder eine Gerade im zweidimensionalen Raum R^2 oder eine Ebene im dreidimensionalen Raum R^3 darstellt. Man muss also eigentlich genauer folgende Formel angeben.

Will man den Abstand eines Punktes von einer Geraden im zweidimensionalen Raum R^2 berechnen, so haben alle Vektoren in der obigen Formel 2 Komponenten:

$$d_{P,g} = \frac{\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \right|} \quad \text{oder besser} \quad d_{P,g} = \frac{\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - d}{\left| \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \right|}$$

Anmerkung zur Darstellung rechts: Das kleine d oben im Zähler ist die rechte Seite in der Koordinatenform der Geraden.

Will man den Abstand eines Punktes von einer Ebene im dreidimensionalen Raum R^3 berechnen, so haben alle Vektoren in der obigen Formel 3 Komponenten:

$$d_{P,E} = \frac{\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right|} \quad \text{oder besser} \quad d_{P,E} = \frac{\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - d}{\left| \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right|}$$

Anmerkung zur Darstellung rechts: Das kleine d oben im Zähler ist die rechte Seite in der Koordinatenform der Ebene.

Beispiel: Bestimme den Abstand des Punktes P (12 / -2 / -4) von der Ebene E!

$$E: -11x_1 + 6x_2 + x_3 = 10$$

Schauen wir uns die Formel von der vorigen Seite noch mal genau an:

$$d_{P,E} = \frac{\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - d}{\left| \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \right|} \qquad \text{oder besser kurz} \qquad d_{P,E} = \frac{\vec{n} * \vec{x} - d}{|\vec{n}|}$$

Wir sehen in der kurzen Darstellung rechts, dass wir den Normalenvektor n der Ebene und die rechte Seite der Koordinatenform, also d, benötigen. Den Wert d = 10 können wir ganz einfach ablesen und an den Normalenvektor kommen wir auch ganz leicht dran, denn auch den können wir in der Koordinatenform ablesen. Er steht bei den Variablen und wir erhalten

für den Normalenvektor n: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wenn wir in den Nenner der Formel schauen, dann sehen wir, dass wir den Betrag des Normalenvektors benötigen. Falls du nicht mehr weißt, wie man den Betrag eines Vektors berechnet, dann schau in das gleichnamige Kapitel:

$$|\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-11)^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{121 + 36 + 1} = \sqrt{158}$$

Wir können jetzt alle Daten in die Formel einsetzen:

$$d_{P,E} = \frac{\vec{n} * \vec{x} - d}{|\vec{n}|} \quad => \quad d_{P,E} = \frac{\begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 10}{\sqrt{158}}$$

Wenn wir jetzt für die x Komponenten die Koordinaten eines beliebigen Punktes einsetzen, erhalten wir den Abstand dieses Punktes von der Ebene und da uns der Abstand des Punktes P von der Ebene E interessiert, setzen wir für x jeweils die Koordinaten des Punktes P ein.

$$d_{P,E} = \frac{\begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - 10}{\sqrt{158}} = \frac{\begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 12 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - 10}{\sqrt{158}} = \frac{(-11)\cdot 12 + 6\cdot(-2) + 1\cdot(-4) - 10}{\sqrt{158}} = \frac{-132 - 12 - 4 + 10}{\sqrt{158}} = -12{,}57$$

Der Abstand beträgt also 12,57 Einheiten (Das Minus bedeutet nur unterhalb der Ebene).