7. Kreis und Kugel

7.1. Darstellungsformen von Kreis und Kugel

Man kann einen Kreis im zweidimensionalen Raum R^2 und eine Kugel im dreidimensionalen Raum R^3 folgendermaßen darstellen.

$$K:(\vec{x}-\vec{m})^2 = r^2 \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} K &= \text{Kreis bzw. Kugel} \\ \vec{x} &= \text{Jeder beliebige Punkt von K} \\ \vec{m} &= \text{Ortsvektor des Mittelpunktes} \\ r &= \text{Radius} \end{aligned}$$

Liegt der Mittelpunkt des Kreises bzw. der Kugel im Ursprung des Koordinatensystems, dann ist der Vektor m der Nullvektor, also ein Vektor, bei dem alle Komponenten Null sind, und die Darstellung vereinfacht sich folgendermaßen.

$$wegen\ \ \vec{m}=\vec{0}\ \ gilt: \quad K:(\vec{x})^2 = r^2 \qquad oder \qquad K:\vec{x}*\vec{x} = r^2$$

Die Darstellungsform hängt also davon ab, ob der Mittelpunkt des Kreises bzw. der Kugel im Ursprung ist oder nicht.

Was kann man nun mit dieser Darstellung anfangen.

1. Man kann zum einen prüfen, ob ein gegebener Punkt auf dem Kreisrand bzw. der Kugeloberfläche liegt.

Dazu setzt man für den Vektor x den Ortsvektor des gegebenen Punktes ein, bildet die Differenz mit dem Ortsvektor m des Mittelpunktes und quadriert anschließend den Vektor, man bildet sozusagen das Skalarprodukt. Entspricht das Ergebnis dem Quadrat des Radius, so liegt der Punkt auf dem Kreisrand bzw. auf der Kugeloberfläche.

Vereinfacht gesagt, setzt man den Punkt für Vektor x ein und prüft, ob die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, denn dann liegt der Punkt auf dem Kreisrand bzw. auf der Kugeloberfläche.

2. Zum anderen kann man mit der Darstellung des Kreises bzw. der Kugel beliebig viele Punkte bestimmen, die auf dem Kreisrand bzw. auf der Kugeloberfläche liegen.

Dazu setzt man beim Vektor x beim Kreis eine Komponente und bei der Kugel zwei Komponenten beliebige Werte ein. Durch Auflösen des Skalarproduktes erhält man eine Gleichung mit nur einer Unbekannten, nämlich der übrig gebliebenen Komponente. Nach dieser löst man dann die Gleichung auf und hat somit alle Koordinaten des gesuchten Punktes.