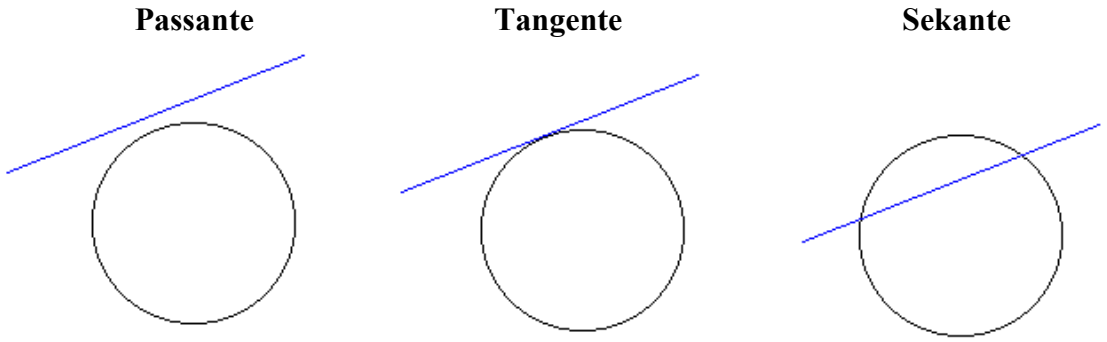
7.1. Gegenseitige Lage von Gerade und Kreis/Kugel

Gegeben sind eine Geraden g und ein Kreis bzw. eine Kugel und die gegenseitige Lage von Gerade und Kreis bzw. Kugel soll untersucht werden. Stellen wir als erstes die Vorüberlegung an, wie denn Gerade und Kreis bzw. Kugel zueinander liegen können.

Sie können aneinander vorbeilaufen, dann wäre die Gerade eine Passante
Sie können sich in einem Punkt berühren, dann wäre die Gerade eine Tangente
Sie können sich in 2 Punkten schneiden, dann wäre die Gerade eine Sekante.

Wir haben also 3 Möglichkeiten, die in der folgenden Skizze noch mal dargestellt sind.



Welcher dieser 3 Fälle zutrifft, kann man rechnerisch wieder über die Anzahl der Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreis bzw. der Kugel bestimmen.

Kein Schnittpunkt	=>	Passante
Ein Schnittpunkt	=>	Tangente
2 Schnittpunkte	=>	Sekante

Bei der mathematischen Umsetzung der Schnittpunktberechnung muss man 2 Fälle unterscheiden:

Fall 1: Die Gerade ist in Parameterform gegeben, dann setzt man die Gerade in die Kreis- bzw. Kugeldarstellung ein, also der Vektor x wird durch die rechte Seite der Parameterform der Geraden ersetzt.

$$K:(\vec{x}-\vec{m})^2 = r^2 \qquad und \qquad g:\vec{x}=\vec{a}+\lambda\cdot\vec{v}$$

Durch Einsetzen der Geraden g in K erhalten wir:

$$K:[(\vec{a}+\lambda\cdot\vec{v})-\vec{m}]^2\, r^2$$

Durch einige hier nicht gezeigt Umformungen erhalten wir eine quadratische Gleichung, in der der Parameter λ die Variable in quadratischer und linearer Form darstellt. Die Gleichung wird dann mit pq-Formel (siehe Band 1 im Kapitel Werkzeugkasten) gelöst und an dieser Stelle entscheidet sich dann auch, ob wir keine, eine oder 2 Lösungen erhalten. Die Anzahl der Lösungen bestimmt die Anzahl der Schnittpunkte und diese den Typ der Geraden. Existieren Schnittpunkte, dann kann man deren Koordinaten bestimmen, indem wir den Parameter λ in die Parameterform der Geraden einsetzen.

Fall 2: Die Gerade ist in der Form y = mx + b gegeben, die wir aus der Analysis noch kennen. Dann müssen wir die Darstellungsform des Kreises bzw. der Kugel etwas umformen, und dann auch wieder die Gerade in die umgeformte Darstellung des Kreises bzw. der Kugel einsetzen. Diesmal wird allerdings y durch die rechte Seite der Geraden ersetzt.

$$K: (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2 \qquad und \qquad g: y = m \cdot x + b$$

Zunächst müssen wir K etwas umformen:

$$K: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2$$

$$K: \left[\begin{pmatrix} x - m_1 \\ y - m_2 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2$$

$$K: (x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$$

Jetzt setzen wir die Gerade g für y in K ein

$$K: (x - m_1)^2 + [(m \cdot x + b) - m_1]^2 = r^2$$

Durch einige Umformungen erhalten wir schließlich auch wieder eine quadratische Gleichung, in der diesmal x die Unbekannte ist. Auch diese quadratische Gleichung wird wieder mit der pq-Formel gelöst und die Anzahl der Lösungen ergibt wieder die Anzahl der Schnittpunkte, woran man wieder den Typ der Geraden ablesen kann. Will man hier die Koordinaten der
evtl. vorhandenen Schnittpunkte berechnen, so muss man die Lösungen der pq-Formel, also die x-Werte in die Gerade einsetzen, also in y = mx + b.