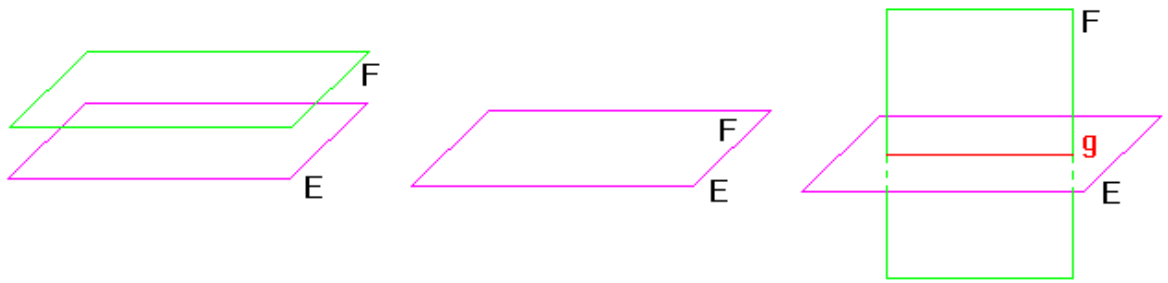
4.4. Gegenseitige Lage von 2 Ebenen

Gegeben sind 2 Ebenen E und F und die gegenseitige Lage dieser beiden Ebenen soll untersucht werden. Stellen wir als erstes die Vorüberlegung an, wie denn 2 Ebenen überhaupt zueinander liegen können. Sie können parallel zueinander sein, wobei man dann noch die Fälle echt und identisch parallel unterscheidet. Sind sie nicht parallel, dann haben sie auf jeden Fall eine Schnittgerade. Denke daran, dass eine Schnittgerade entsteht, wenn sich 2 Ebenen schneiden. Wir haben also 3 Möglichkeiten, die in der folgenden Skizze noch mal dargestellt sind.

echt parallel **identisch parallel** **Schnittgerade**



Wenn man die beiden Ebenen E und F als Parameterform darstellt, dann erhält man:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \qquad \textit{und} \qquad F: \vec{x} = \vec{b} + r \cdot \vec{t} + s \cdot \vec{u}$$

Wenn man die gegenseitige Lage von 2 Ebenen mathematisch untersuchen möchte, hat man insgesamt 4 Möglichkeiten:

<u>Wenn</u> eine Ebene in Parameterform $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$ **und die andere in Koordinatenform** $F: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ **gegeben ist.**

1. E in F: Ebene in Parameterform in die Ebene in Koordinatenform einsetzen (nächste Seite)

<u>Wenn</u> beide Ebenen in Koordinatenform gegeben $E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ **sind,** dann wandelt man eine Ebene in Parameterform um und benutzt dann Möglichkeit 1.

<u>Wenn</u> beide Ebenen in Parameterform $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$ **gegeben sind,** kann man entweder eine der beiden Ebenen in die Koordinatenform umwandeln (Stichwort Parametereliminierung) und dann mit Möglichkeit 1 weitermachen oder eine der 3 folgenden Möglichkeiten benutzen.

2. Standardmethode: Die beiden Ebenen <u>gleichsetzen</u> (S.94), also E = F
3. Alternativmethode mittels <u>Komplanarprobe</u> (S.96)
4. Alternativmethode mittels <u>Determinanten</u> (S.97)

Auf den folgenden Seiten werden die 4 Verfahren beschrieben.

Beispiel zu Möglichkeit 1: Gegeben sind die Ebene E in Parameterform

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$ und die Ebene F in Koordinatenform: $F: 2x - 4y + z = 24$.

Bestimme die gegenseitige Lage der Ebenen mit Möglichkeit 1, also dem Ansatz E in F.

Grundprinzip: Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte durch einsetzen von E in F:

Als erstes ersetzen wir in der Ebene E den Vektor x durch seine Komponenten x, y und z und dröseln die Vektorgleichung in 3 Komponentengleichungen auf:

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{aligned} x &= 1 + 2r + 6s \\ y &= -2 + 3r + 2s \\ z &= 5 - r + 14s \end{aligned}$$

Die Komponenten x, y und z setzen wir in die Koordinatengleichung der Ebene F ein, deshalb auch der Ansatz E in F. Beim einsetzen die Klammern nicht vergessen, denn es handelt sich um Terme.

$$\begin{aligned} F: 2x - 4y + z &= 24 \\ 2 \cdot (1 + 2r + 6s) - 4 \cdot (-2 + 3r + 2s) + (5 - r + 14s) &= 24 \\ 2 + 4r + 12s + 8 - 12r - 8s + 5 - r + 14s &= 24 \\ 15 - 9r + 18s &= 24 \mid -15 \\ -9r + 18s &= 9 \mid -18s \\ -9r &= -18s + 9 \mid :(-9) \\ r &= 2s - 1 \end{aligned}$$

Die entstehende Gleichung vereinfachen wir und lösen sie nach r oder s auf, in dem Fall hier haben wir nach r aufgelöst. Beachte die Interpretationsmöglichkeiten im nächsten Kästchen.

Können wir die entstehende Gleichung nach einem Parameter, egal ob r oder s, auflösen, bedeutet dies, dass die beiden Ebenen sich schneiden und deshalb eine Schnittgerade vorhanden ist. Diese Schnittgerade können wir berechnen, indem wir den Parameter, nach dem aufgelöst wurde (hier r) in die Parameterform der Ebene E einsetzen (hier: r in E). Durch vereinfachen (siehe nächstes Kästchen auf der nächsten Seite) erhalten wir die Schnittgerade.

Können wir die entstehende Gleichung nicht nach einem Parameter auflösen, weil beide Parameter (r und s) heraus gefallen sind und wir deshalb eine wahre Aussage der Art 0 = 0 erhalten, bedeutet das unendlich viele Schnittpunkte und das wiederum bedeutet, dass die beiden Ebenen identisch parallel sind.

Können wir die entstehende Gleichung nicht nach einem Parameter auflösen, weil beide Parameter (r und s) heraus gefallen sind und wir deshalb eine falsche Aussage der Art 0 = 5 erhalten, bedeutet das keinen Schnittpunkt und das wiederum bedeutet, dass die beiden Ebenen echt parallel sind.

Berechnung der Schnittgeraden durch einsetzen des Parameters r in die Ebene E mit

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad r = 2s-1$$

Wir erhalten dann Folgendes, wobei zu beachten ist, dass wir für den Parameter r einen Term einsetzen und deshalb muss natürlich eine Klammer gesetzt werden:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + (2s-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Die nächsten Schritte sind ein wenig verwirrend, also volle Konzentration beim Nachvollziehen der einzelnen Schritte. Zunächst multiplizieren wir den ersten Richtungsvektor mit dem davor stehenden Term aus:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4s \\ 6s \\ -2s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ +1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Jetzt fassen wir die zusammenpassenden Vektoren zusammen, nämlich den ersten und den dritten Vektor (ergibt dann den Stützvektor der Schnittgeraden) und den zweiten und den vierten Vektor, denn beide Vektoren enthalten den Parameter s (ergibt dann den Richtungsvektor der Schnittgeraden):

$$g_{EF}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Möglichkeit 2: Man überprüft die Anzahl der Schnittpunkte, indem man die Ebenen gleichsetzt, also E = F

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \qquad und \qquad F: \vec{x} = \vec{b} + r \cdot \vec{t} + s \cdot \vec{u}$$

Durch Gleichsetzen von den 2 Ebenen erhalten wir:

$$E = F$$
$$\vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} = \vec{b} + r \cdot \vec{t} + s \cdot \vec{u}$$

Schreiben wir die Vektoren mit Komponenten, dann erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung dröseln wir zeilenweise in 3 Komponentengleichungen auf:

$$a_1 + v_1\lambda + w_1\mu = b_1 + t_1 r + u_1 s$$
$$a_2 + v_2\lambda + w_2\mu = b_2 + t_2 r + u_2 s$$
$$a_3 + v_3\lambda + w\ \mu = b_3 + t_3 r + u_3 s$$

Wir erhalten ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Unbekannten, nämlich den Parametern λ, μ und r, s. Dieses Gleichungssystem lösen wir mit dem Einsetzungsverfahren oder einem sonstigen Verfahren, das wir beherrschen (GAUSS, …). Dabei müssen wir allerdings darauf achten, dass im Falle einer Lösung nicht wirklich eine Lösung für einen Parameter rauskommt, sondern ein Zusammenhang zwischen 2 Parametern einer Ebene.
Wir müssen also beim Lösen des Gleichungssystem darauf achten, das wir 2 Parameter einer Ebene, also λ und μ oder r und s eliminieren.

Die Lösung des Gleichungssystems kann man folgendermaßen interpretieren:

=> Keine Lösung (Widerspruch z.B. 0 = 5) bedeutet keinen Schnittpunkt, also echt parallel.
=> Unendlich viele Lösungen, wobei alle Parameter heraus fallen (0 = 0), bedeuten unendlich viele Schnittpunkte, also identisch parallel.
=> Unendlich viele Lösungen, wobei ein oder 2 Parameter übrig bleiben, bedeutet eine gemeinsame Schnittgerade, also nicht parallel.

Existiert eine Schnittgerade, dann bestimmt man diese, indem man die Lösung des Linearen Gleichungssystems, also die 2 Parameter einer Ebene, in die entsprechende Parameterform einsetzt. Falls du nicht genau weißt, wie das gemeint ist, dann schau auf der vorigen Seite ganz oben nach.

Das Ganze war jetzt sehr theoretisch. Zum besseren Verständnis wird auf der nächsten Seite ein Beispiel vorgerechnet.

Beispiel zu Möglichkeit 2: Bestimme die gegenseitige Lage der beiden Ebenen E und F, wobei beide Ebenen in Parameterform gegeben sind.

Hinweis: Wenn dir der folgende Lösungsweg nicht gefällt, kannst du die Parameterform einer der beiden Ebenen z.B. mit Hilfe der Parametereliminierung (S.61) in die Koordinatenform umwandeln und dann Möglichkeit 1 (S.92) anwenden.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Grundprinzip: Auch hier wollen wir die Anzahl der Schnittpunkte überprüfen, allerdings setzen wir diesmal die beiden Ebenen E und F gleich. Der Ansatz lautet: E = F

$$E = F \quad => \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{aligned} 1 + 2\lambda - \mu &= 2 + r + 2s \\ 2 + \lambda + 2\mu &= 7 + 2r + 3s \\ 4 - 3\lambda + 4\mu &= 15 - 2r + 4s \end{aligned}$$

Nach dem Gleichsetzen dröseln wir die Vektorgleichung in 3 Komponentengleichungen auf und erhalten dadurch ein Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 4 Variablen. Ein solches Gleichungssystem löst man am besten mit dem Additionsverfahren. Beim Lösen werden 2 Parameter heraus fallen und man muss darauf achten, dass die 2 Parameter, die heraus fallen sollen, aus einer Ebene sind. Man kann also „λ *und* μ“ oder „r und s“ heraus schmeißen, aber keine anderen Kombinationen von 2 Parametern, da man ansonsten am Schluss eine eventuell vorhandene Schnittgerade nicht bestimmen kann.

Wenn man bei unserem Gleichungssystem λ *und* μ entfernt, erhält man als Lösung folgenden Zusammenhang: r = 2,5s + 4, also existiert eine Schnittgerade (Beachte zur Erklärung auch das nächste Kästchen)

Interpretation der Lösung des Linearen Gleichungssystems:

Bleiben ein oder zwei Parameter erhalten, bedeutet das, dass eine Schnittgerade vorhanden ist. Diese Schnittgerade können wir berechnen, indem wir nach einem Parameter auflösen und diesen Parameter (hier r) in die entsprechende Parameterform der Ebene F einsetzen (hier: r in F). Durch vereinfachen erhalten wir die Schnittgerade. Diese Rechnung wird hier nicht mehr ausführlich dargestellt, verläuft aber genau so wie beim Verfahren 1 vor 2 Seiten.

Fallen alle Parameter heraus und wir erhalten deshalb eine wahre Aussage der Art 0 = 0 , bedeutet das unendlich viele Schnittpunkte und das wiederum bedeutet, dass die beiden Ebenen identisch parallel sind.

Fallen alle Parameter heraus und wir erhalten deshalb eine falsche Aussage der Art 0 = 5 , bedeutet das keine Schnittpunkte und das wiederum bedeutet, dass die beiden Ebenen echt parallel sind.

Möglichkeit 3: Man überprüft, ob die Richtungsvektoren der einen Ebene und die Richtungsvektoren der anderen Ebene komplanar sind. Wie man die Komplanarprobe durchführt, lies im gleichnamigen Kapitel auf Seite 27 nach. Sind die 4 Vektoren komplanar, dann liegen die 4 Vektoren in einer Ebene. Das Ergebnis der Komplanarprobe kann man folgendermaßen interpretieren.

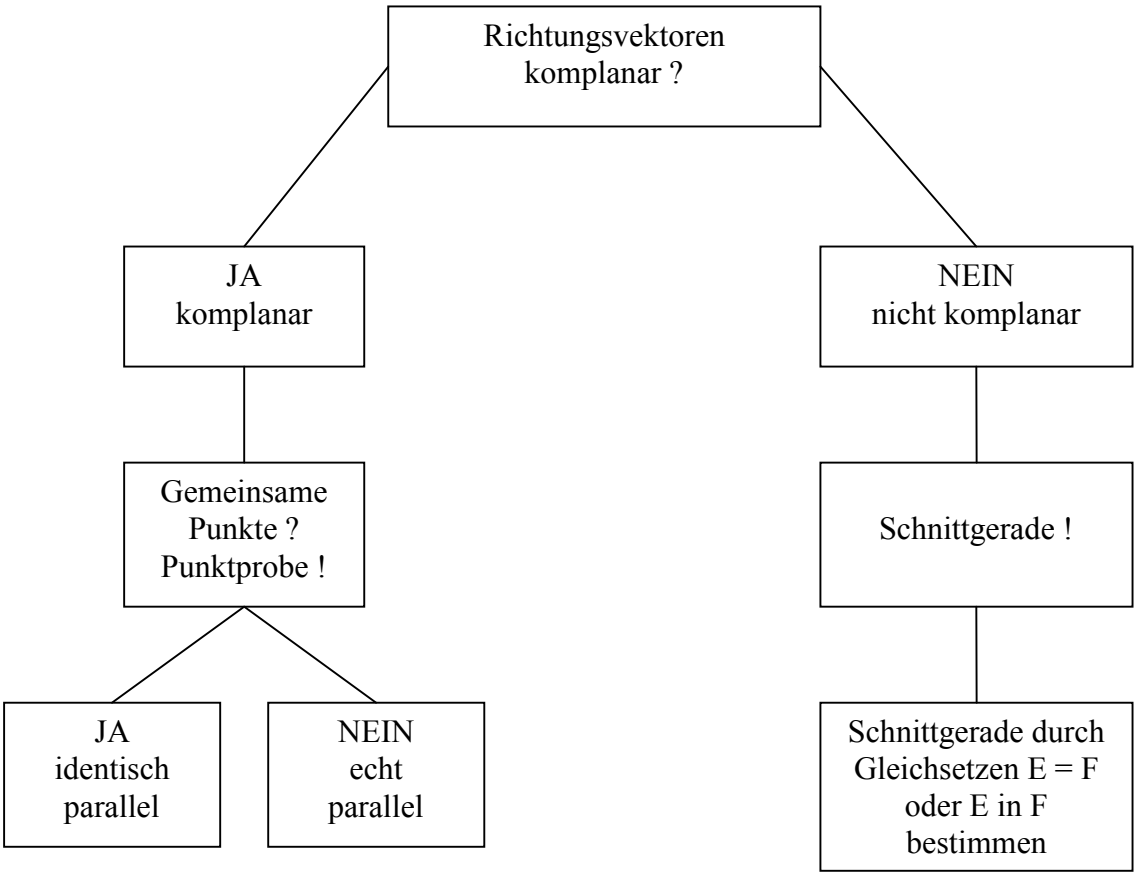
Sind die 4 Vektoren nicht komplanar, dann haben die beiden Ebenen eine Schnittgerade. Diesen Schnittgerade kann man durch Gleichsetzen, also E = F, bestimmen.

Sind die beiden Richtungsvektoren der einen Ebene, sagen wir E, komplanar mit den beiden Richtungsvektoren der anderen Ebene, also F, dann können die Ebenen nur parallel verlaufen. Bei dieser Prüfung überprüfen wir, ob folgende 2 Gleichungssysteme lösbar sind, die aus den beiden folgenden Ansätzen entstehen:

$$k \cdot \vec{v} + l \cdot \vec{w} = \vec{u} \qquad und \qquad m \cdot \vec{v} + n \cdot \vec{w} = \vec{t}$$

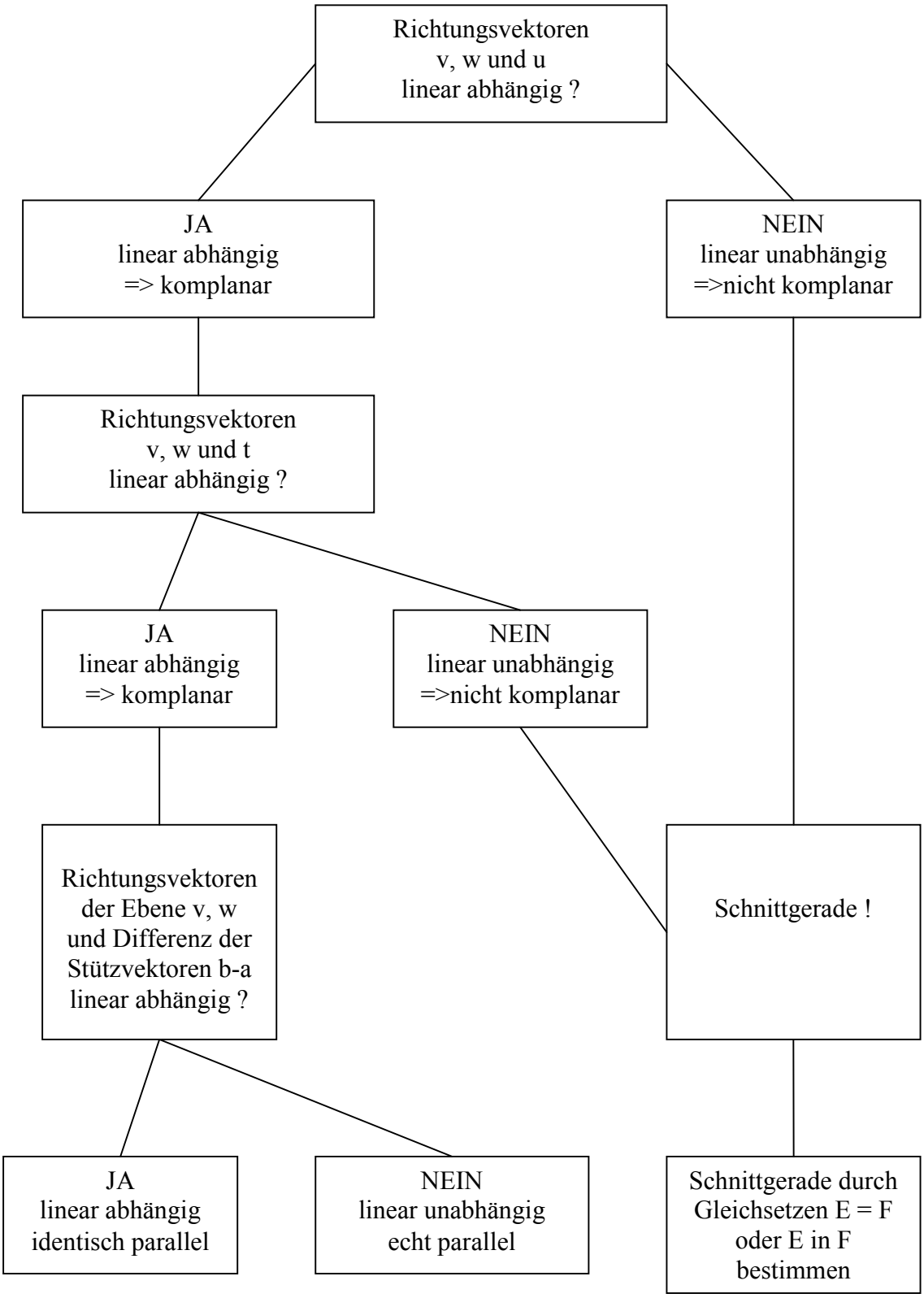
Die Richtungsvektoren der einen Ebene müssen als Linearkombination der Richtungsvektoren der anderen Ebene darstellbar sein. Wir können so also auf Parallelität der Ebenen prüfen.
Ob sie nun echt oder identisch parallel sind, kann man durch die Punktprobe bestimmen. Man prüft dabei, ob ein Punkt der einen Ebene auch Punkt der anderen Ebene ist. Schau notfalls im Kapitel Parameterform von Ebenen unter Punktprobe bei Ebenen (S.50) nach.

Den soeben beschriebenen Sachverhalt können wir in folgendem Schema nachvollziehen:



Möglichkeit 4: Mithilfe der Determinantenrechnung jeweils die 3 in einem Kasten genannten Vektoren auf Lineare Abhängigkeit untersuchen. Schauen sie bitte im Kapitel Lineare

Abhängigkeit (S.24) unter Alternativmethode mittels Determinantenrechnung nach, wie diese Untersuchung funktioniert.



4.5.