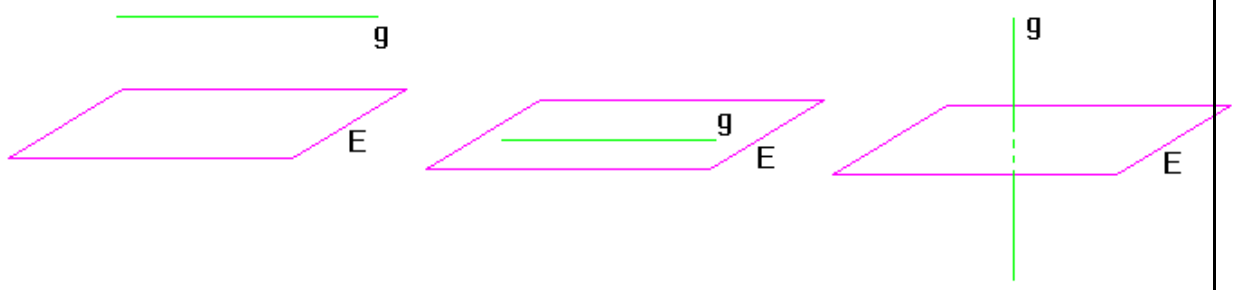
# 4.3. Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene E und die gegenseitige Lage dieser beiden soll untersucht werden. Stellen wir als erstes die Vorüberlegung an, wie denn eine Gerade und eine Ebene überhaupt zueinander liegen können. Sie können parallel zueinander sein, wobei man dann noch die Fälle echt und identisch parallel unterscheidet. Sind sie nicht parallel, dann haben sie auf jeden Fall einen Schnittpunkt. Wir haben also 3 Möglichkeiten, die in der folgenden Skizze noch mal dargestellt sind.

**echt parallel** **identisch parallel** **Schnittpunkt**




Wenn man Ebene E und Gerade g als Parameterform darstellt, dann erhält man:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \qquad und \qquad g: \vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{u}$$

**Wenn man die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene mathematisch untersuchen möchte, hat man insgesamt 4 Möglichkeiten, wobei es immer am einfachsten ist, wenn die Ebene in Koordinatenform gegeben ist:**

**Wenn die Ebene in Koordinatenform** $E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ **gegeben ist**

**1.** Gerade in die Ebene einsetzen, also g in E (siehe nächste Seite)

**Wenn die Ebene in Parameterform gegeben ist**, kann man diese mit Hilfe der Parametereliminierung in die Koordinatenform umwandeln und dann mit Möglichkeit 1 fortfahren oder wenn man auf die Umwandlung in die Koordinatenform verzichten möchte eine der folgenden Möglichkeiten benutzen:

**2. Standardverfahren:** Gerade und Ebene gleichsetzen ,also g = E (S.87)
**3. Alternativverfahren** mittels Komplanarprobe (S.89)
**4. Alternativverfahren** mittels Determinantenrechnung (S.90)

**Auf den folgenden Seiten werden die 4 Verfahren beschrieben.**

**Möglichkeit 1:** Schauen wir uns das gleich an einem **Beispiel** an:

Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g in Parameterform $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

und der Ebenen E in Koordinatenform $E: 2x + y - 4z = 12$

**Grundprinzip:** Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte durch einsetzen von g in E:

Als erstes ersetzen wir in der Geraden g den Vektor x durch seine Komponenten x, y und z und dröseln die Vektorgleichung in 3 Komponentengleichungen auf:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{aligned} x &= 2 + 8r \\ y &= 4 + 2r \\ z &= 6 + r \end{aligned}$$

Die Komponenten x, y und z setzen wir in die Koordinatengleichung der Ebene E ein, deshalb auch der Ansatz g in E. Beim einsetzen die Klammern nicht vergessen, denn es handelt sich um Terme.

$$\begin{aligned} E: 2x + y - 4z &= 12 \\ 2 \cdot (2 + 8r) + (4 + 2r) - 4 \cdot (6 + r) &= 12 \\ 4 + 16r + 4 + 2r - 24 - 4r &= 12 \\ -16 + 14r &= 12 \quad \big| +16 \\ 14r &= 28 \quad \big| :14 \\ r &= 2 \end{aligned}$$

Die entstehende Gleichung lösen wir nach r auf und erhalten den Wert r = 2.

Kommt an dieser Stelle für den Parameter r ein Wert heraus, bedeutet dies, dass ein Schnittpunkt vorhanden ist. Diesen Schnittpunkt können wir berechnen, indem wir den Parameter r in die Parameterform der Geraden g einsetzen (r in g). Durch ausrechnen erhalten wir hier den Schnittpunkt S (18 / 8 / 8).

Erhalten wir für den Parameter r keinen Wert, sondern eine wahre Aussage der Art 0 = 0, bedeutet das unendlich viele Schnittpunkte und das wiederum bedeutet, dass Gerade und Ebene identisch parallel sind.

Erhalten wir für den Parameter r keinen Wert, sondern eine falsche Aussage der Art 0 = 5, bedeutet das keinen Schnittpunkt und das wiederum bedeutet, dass Gerade und Ebene echt parallel sind.

**Möglichkeit 2:** Man überprüft die Anzahl der Schnittpunkte, indem man die Ebene und die Gerade gleichsetzt, also E = g

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} \qquad und \qquad g: \vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{u}$$

Durch Gleichsetzen von Ebene und Gerade erhalten wir:

$$E = g$$
$$\vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w} = \vec{b} + s \cdot \vec{u}$$

Schreiben wir die Vektoren mit Komponenten, dann erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung dröseln wir zeilenweise in 3 Komponentengleichungen auf:

$$a_1 + v_1\lambda + w_1\mu = b_1 + u_1 s$$
$$a_2 + v_2\lambda + w_2\mu = b_2 + u_2 s$$
$$a_3 + v_3\lambda + w\ \mu = b_3 + u_3 s$$

Wir erhalten ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten, nämlich den Parametern λ, μ und s. Dieses Gleichungssystem lösen wir mit dem Additionsverfahren oder einem sonstigen Verfahren, das du beherrschst (GAUSS, …).

Die Lösung des Gleichungssystems kann man folgendermaßen interpretieren:

Keine Lösung bedeutet keinen Schnittpunkt, also echt parallel.
Unendlich viele Lösungen bedeutet unendlich viele Schnittpunkte, also identisch parallel.
1 Lösung bedeutet einen gemeinsamen Punkt, also nicht parallel, sondern ein Schnittpunkt.

Existiert nur ein Schnittpunkt, dann bestimmt man diesen, indem die Lösung des Linearen Gleichungssystems, also die Parameter, in die Parameterformen einsetzt. Man kann entweder den Parameter s der Geraden in die Parameterform der Geraden einsetzen, oder die Parameter λ und μ in die Parameterform der Ebenen einsetzen. In beiden Fällen muss der Schnittpunkt als Ergebnis rauskommen, wobei die Variante über die Parameterform der Geraden schneller ist.

**Das war jetzt auf jeden Fall viel zu theoretisch. An dem Praxisbeispiel auf der nächsten Seite wird das viel verständlicher.**

**Beispiel zu Möglichkeit 2:** Bestimme die gegenseitige Lage der Geraden g und der Ebene E, wobei beide in Parameterform gegeben sind.

**Hinweis:** Wenn dir der folgende Lösungsweg nicht gefällt, kannst du die Parameterform der Ebene mit Hilfe der Parametereliminierung in die Koordinatenform umwandeln und dann Möglichkeit 1 anwenden.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

**Grundprinzip:** Auch hier wollen wir die Anzahl der Schnittpunkte überprüfen, allerdings setzen wir diesmal die Ebene E und die Gerade g gleich. Der Ansatz lautet: E = g

$$E = g \quad => \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{aligned} 6 - 2s - t &= -3 + 2r \\ 2 + 3s - 4t &= -5 + r \\ -5 + s + 5t &= 16 - 4r \end{aligned}$$

Durch das Gleichsetzen erhalten wir eine Vektorgleichung, die wir in 3 Komponentengleichungen aufdröseln. Wir erhalten somit ein Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen. Dieses muss man mit irgendeinem Verfahren lösen. Ich persönlich benutze für Gleichungssysteme, bei denen die Anzahl der Gleichungen identisch mit der Anzahl der Variablen ist, das Additionsverfahren bzw. den daraus entwickelten GAUSS. Wie auch immer, als Lösung des Gleichungssystems erhält man r = 1, s = 2 und t = 3.

Da das Gleichungssystem lösbar ist, ist also ein Schnittpunkt vorhanden (darauf prüfen wir ja mit dem Ansatz E = g). Die Koordinaten des Schnittpunktes erhalten wir durch Einsetzen der entsprechenden Parameter. Entweder r in die Gerade g oder s und t in die Ebene E, wobei r in g einfacher ist. Wir erhalten dann für den Schnittpunkt S (-1 / -4 / 12)

Wäre das Gleichungssystem übrigens nicht lösbar, was man an einem Widerspruch im Rechenverlauf erkennt (0 = 5), dann ist kein Schnittpunkt vorhanden und daraus schließt man, dass die Gerade und die Ebene echt parallel zueinander sind.

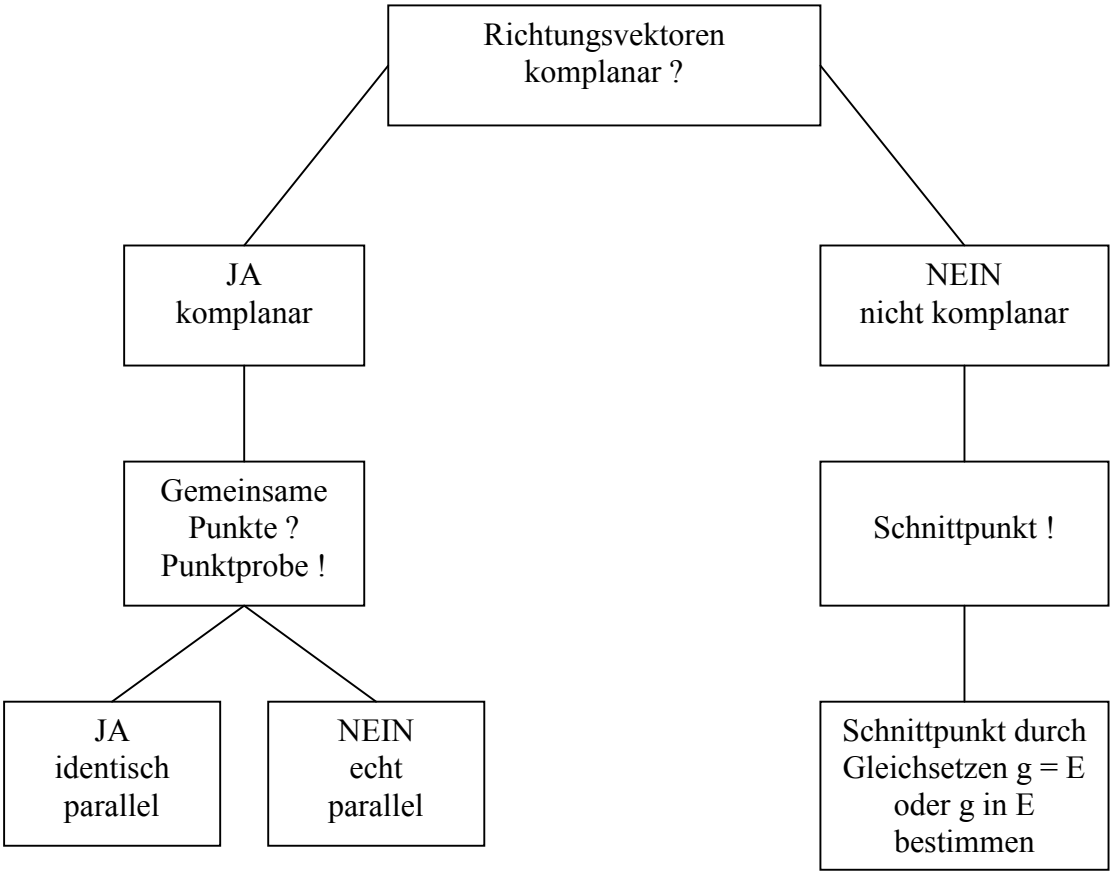
Würden wir bei dem Linearen Gleichungssystem unendlich viele Lösungen erhalten, was man im Rechenverlauf an einer wahren Aussage der Art 0 = 0 erkennt, dann existieren unendlich viele Schnittpunkte und daraus schließt man, dass die Gerade und die Ebene identisch parallel sind, die Gerade liegt also in der Ebene.

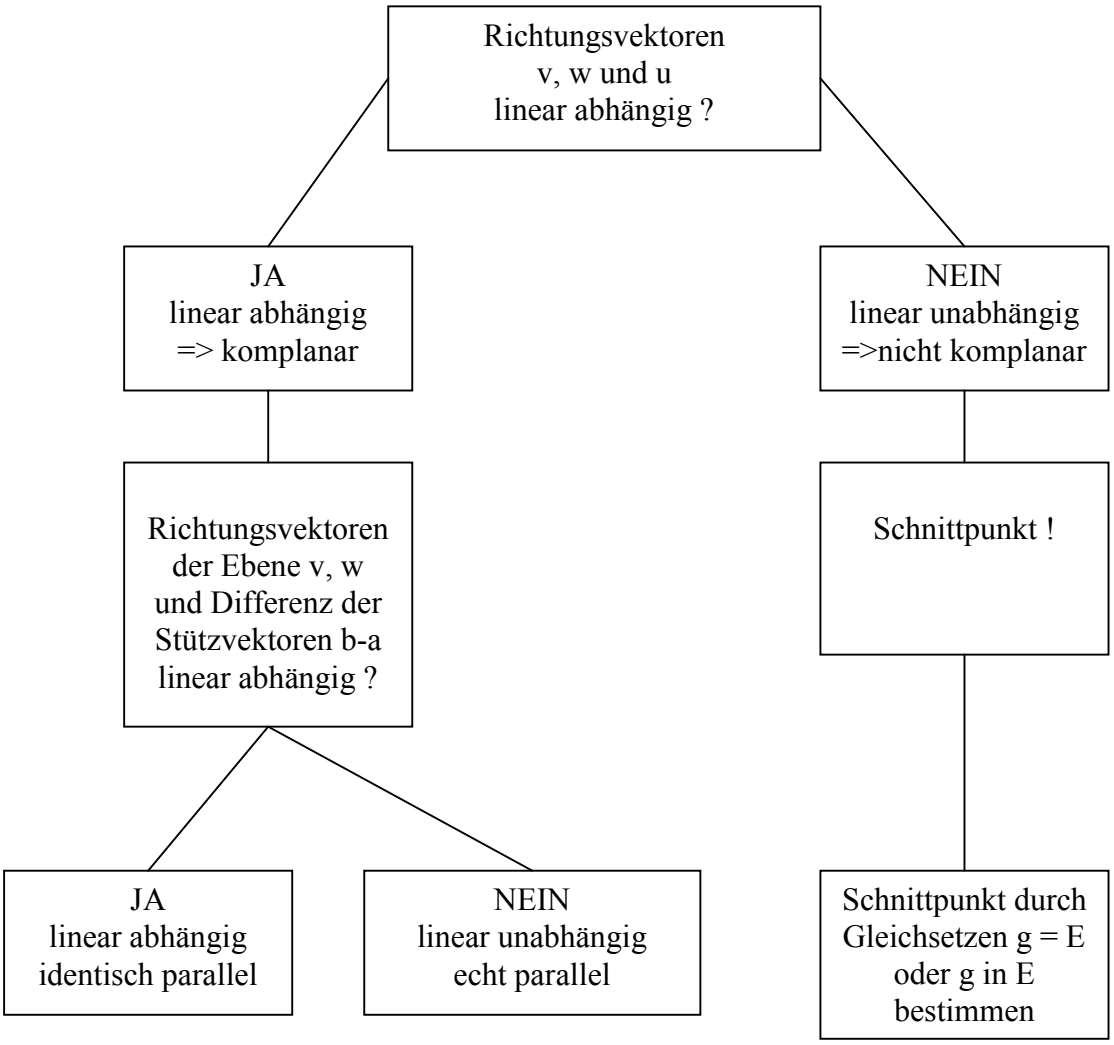
**Möglichkeit 3:** Man überprüft, ob der Richtungsvektor der Gerade und die Richtungsvektoren der Ebene komplanar sind. Wie man die Komplanarprobe (S.27) durchführt, lies im gleichnamigen Kapitel nach. Sind die 3 Vektoren Komplanar, dann liegen die 3 Vektoren in einer Ebene. Das Ergebnis der Komplanarprobe kann man folgendermaßen interpretieren:

Sind die 3 Vektoren nicht komplanar, dann haben Gerade und Ebene einen Schnittpunkt. Diesen Schnittpunkt kann man durch Gleichsetzen also E = g, bestimmen.

Sind die 3 Vektoren komplanar, dann können Gerade und Ebene nur parallel verlaufen. Ob sie nun echt oder identisch parallel sind, kann man durch die Punktprobe bestimmen. Man prüft dabei, ob ein Punkt der Ebene auch Punkt der Gerade ist. Am einfachsten lässt sich das durchführen, indem man den Vektor x der Parameterform der Gerade durch den Stützvektor der Ebene ersetzt. Schau notfalls im Kapitel „Punktprobe“ nach.

Den soeben beschriebenen Sachverhalt kannst du in folgendem Schema nachvollziehen:




**Möglichkeit 4:** Mithilfe der Determinantenrechnung jeweils die 3 in einem Kasten genannten Vektoren auf Lineare Abhängigkeit untersuchen. Schau bitte im Kapitel „Lineare

Abhängigkeit“ (S.24) unter Alternativmethode mittels Determinantenrechnung nach, wie diese Untersuchung funktioniert.