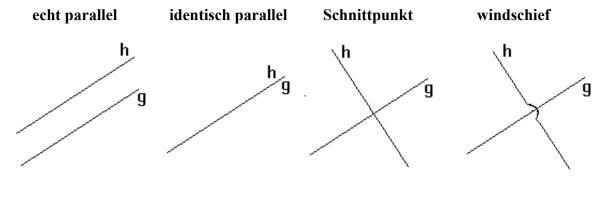
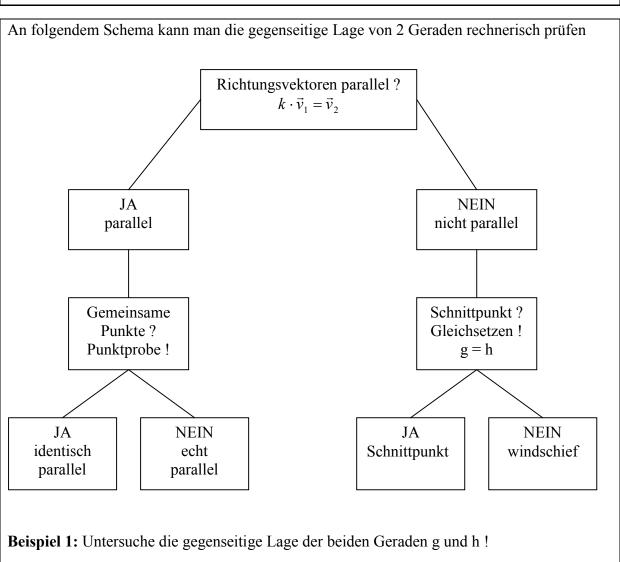
4.2. Gegenseitige Lage von 2 Geraden

Gegeben sind 2 Geraden g und h in Parameterform und die gegenseitige Lage dieser beiden Geraden soll untersucht werden. Stellen wir als erstes die Vorüberlegung an, wie denn 2 Geraden überhaupt zueinander liegen können. Sie können parallel zueinander sein, wobei man dann noch die Fälle echt und identisch parallel unterscheidet. Sind sie nicht parallel, dann haben sie entweder einen Schnittpunkt, oder laufen aneinander vorbei, was man dann mit windschief bezeichnet. Wir haben also 4 Möglichkeiten, die in der folgenden Skizze noch mal dargestellt sind.





$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2\\-4\\6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3\\-2\\9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4\\-8\\12 \end{pmatrix}$$

Tipp: Bei der Rechnung benötigt man die Prüfung auf <u>Parallelität</u> (S.25) und die <u>Punktprobe</u> bei Geraden (S.37). Beides ist in dem jeweiligen Kapitel genau beschrieben.

Zunächst müssen wir prüfen, ob die Geraden parallel zueinander sind. Dazu betrachten wir uns die Richtungsvektoren (die hinteren Vektoren). Durch bloßes Anschauen der Richtungsvektoren sehen wir, dass die beiden Richtungsvektoren, und somit auch die beiden Geraden, parallel sind, denn, wenn man den Richtungsvektor von g mit 2-mal nimmt, dann erhält man den Richtungsvektor von h. Das müssen wir jetzt allerdings noch mathematisch zeigen und zwar mit dem Ansatz: $k \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2$

$$k \cdot \vec{v_1} = \vec{v_2}$$
 => $k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$ => $2k = 4$ => $k = 2$
 $-4k = -8$ => $k = 2$
 $6k = 12$ => $k = 2$

Da wir für k immer den gleichen Wert erhalten, sind die beiden Richtungsvektoren vielfache (k-fache) voneinander und somit sind sie parallel.

Jetzt wissen wir, dass die beiden Geraden g und h auf jeden Fall parallel zueinander sind, die Frage ist nur, echt oder identisch parallel. Gemäß dem Schema auf der vorigen Seite funktioniert das mit Hilfe der Punktprobe, die uns verrät, ob die beiden Geraden gemeinsame Punkte haben. Der Stützvektor (vorne) führt ja immer vom Ursprung zu einem Punkt der Geraden. Daraus können wir schließen, dass der Punkt (1 / 2 / 3) auf der Geraden g liegt. Wenn wir wissen möchten, ob dieser Punkt auch auf der Geraden h liegt, dann setzen wir den Punkt, genauer gesagt dessen Ortsvektor, in die Gerade h für den Vektor x ein. Das sieht dann folgendermaßen aus:

$$h: \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\-2\\9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4\\-8\\12 \end{pmatrix} \qquad => \qquad 1 = 3 + 4s \qquad => \qquad s = -0,5$$
$$2 = -2 - 8s \qquad => \qquad s = -0,5$$
$$3 = 9 + 12s \qquad => \qquad s = -0,5$$

Die Vektorgleichung dröseln wir in 3 Komponentengleichungen auf und lösen diese jeweils nach s auf. Wir erhalten für s jeweils den gleichen Wert und schließen daraus, dass der Punkt (1/2/3) der Geraden g auch auf der Geraden h liegt. Daraus schließen wir wiederum, dass die Geraden g und h identisch parallel sind. Würde der Punkt (1/2/3) der Geraden g nicht auf der Geraden h liegen, dann wären die beiden Geraden echt parallel.

Anmerkung: Wir haben gerade bei der Punktprobe den Stützvektor von g in die Gerade h eingesetzt. Es wäre auch möglich gewesen, den Stützvektor der Geraden h in die Gerade g einzusetzen.

Beispiel 2: Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h!

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1\\2\\4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6\\-1\\2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5\\5\\-2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1\\-2\\4 \end{pmatrix}$$

Tipp: Bei der Rechnung benötigt man die Prüfung auf <u>Parallelität</u> (S.25) und die <u>Schnittpunktberechnung von 2 Geraden</u> (S.76). Beides ist in den entsprechenden Kapiteln genau beschrieben.

Zunächst müssen wir prüfen, ob die Geraden parallel zueinander sind. Dazu betrachten wir uns die Richtungsvektoren (die hinteren Vektoren). Durch bloßes anschauen der Richtungsvektoren sehen wir, dass die beiden Richtungsvektoren, und somit auch die beiden Geraden, nicht parallel sind, denn man kann den Richtungsvektor von g mit keiner Zahl so mal nehmen, dass man den Richtungsvektor von h erhält. Das müssen wir jetzt allerdings noch mathematisch zeigen und zwar mit dem Ansatz: $k \cdot \vec{v_1} = \vec{v_2}$

$$k \cdot \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \qquad \Rightarrow \qquad k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c} 6k = 1 \\ -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c} k = \frac{1}{6} \\ -2 \\ 2k = 4 \end{array} \Rightarrow \qquad \begin{array}{c} k = 2 \\ -2 \\ 2k = 4 \end{array}$$

Wir sehen, dass für k nicht immer das Gleiche herauskommt und somit liegt ein Widerspruch vor. Die Richtungsvektoren sind also nicht parallel und somit auch die Geraden nicht.

Wir wissen jetzt also, dass die beiden Geraden nicht parallel sind, also haben sie entweder einen Schnittpunkt oder sie sind windschief. Um das entscheiden zu können, müssen wir gemäß dem <u>Schema auf Seite 81</u> dieses Kapitels prüfen, ob die beiden Geraden einen Schnittpunkt haben, indem wir sie gleichsetzen. Ansatz: g = h

$$g = h \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} 1 + 6r = 5 + s \\ 2 - r = 5 - 2s \\ 4 + 2r = -2 + 4s \end{array}$$

Nachdem wir die Vektorgleichung in 3 Komponentengleichungen aufgedröselt haben, erhalten wir ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Variablen. Dieses können wir z.B. mit dem Additionsverfahren oder dem Einsetzungsverfahren lösen. Ich persönlich benutze für ein Gleichungssystem der Art 3 Gleichungen und 2 Variablen das Einsetzungsverfahren, indem ich eine beliebige Gleichung nach einer beliebigen Variablen auflöse und diese in alle anderen Gleichungen einsetze. Hier bietet sich an, die erste Gleichung nach s aufzulösen und dieses s dann in die beiden anderen Gleichungen einzusetzen. Wir erhalten dann zweimal die Lösung r = 1 und durch einsetzen von r erhalten wir noch s = 2. Das Gleichungssystem ist also lösbar und daraus schließen wir, dass die beiden Geraden einen Schnittpunkt haben. Wäre beim Lösen des Gleichungssystems ein Widerspruch aufgetreten z.B. 0 = 5 oder r = 1 und r = 2 dann wäre das Gleichungssystem nicht lösbar gewesen, somit kein Schnittpunkt vorhanden, und die beiden Geraden wären dann windschief. Im Beispiel haben wir allerdings die Lösung r = 1 und s = 2 erhalten. Jetzt können wir noch die Koordinaten des Schnittpunktes bestimmen, indem wir entweder den Parameter r in die Gerade g oder den Parameter s in die Gerade h einsetzen. Es genügt eine Rechnung, wobei bei beiden Rechnungen der gleiche Schnittpunkt heraus kommt. Wir setzen r = 1 in g ein und erhalten:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6 \\ 2-1 \\ 4+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt S hat also die Koordinaten S (7 / 1 / 6)