Variante 1 zu b) Eine Ebene ist in Koordinatenform gegeben und soll in Parameterform dargestellt werden.

$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$$

Der einfachste Weg ist, indem man 3 beliebige Punkte der Ebene bestimmt und mithilfe von diesen 3 Punkten die Parameterform der Ebene aufstellt. Wie bestimmt man nun am einfachsten die 3 Punkte. Im vorigen Fall a) haben wir ja schon eine Methode kennen gelernt, nämlich durch Einsetzen von beliebigen Zahlen für zwei der drei x-Komponenten in der Koordinatendarstellung. Um das ein bisschen zu schematisieren, kann man folgendermaßen vorgehen

Für Punkt A gilt:	$x_1 = 0$	*und*	$x_2 = 0$	=>	A $(0 / 0 / x_3)$
Für Punkt B gilt:	$x_2 = 0$	*und*	$x_3 = 0$	=>	B $(x_1 / 0 / 0)$
Für Punkt C gilt:	$x_1 = 0$	*und*	$x_3 = 0$	=>	C $(0 / x_2 / 0)$

Das Vorige soll folgendes bedeuten. Will man den Punkt A bestimmen, dann setzt man in der Koordinatengleichung 2 Komponenten gleich Null und bestimmt die dritte Komponente. Die drei Komponenten sind dann die Koordinaten des gesuchten Punktes. Für den Punkt B gilt das gleiche, allerdings werden jetzt 2 andere Komponenten gleich Null gesetzt. So können wir also 3 Punkte der Ebene bestimmen.

Wie man nun aus diesen 3 Punkten die Parameterform einer Ebene bastelt, haben wir bereits im Kapitel Aufstellen der Parameterform von Ebenen (S.48) besprochen. Erinnern wir uns daran, dass man bei der Parameterform 3 Dinge braucht, nämlich einen Stützvektor a und 2 Richtungsvektoren. Aus den Ortsvektoren der 3 Punkte können wir die Vektoren der folgenden Parameterdarstellung bestimmen.

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC}$$

Es sei noch mal daran erinnert, dass man z.B. den Vektor AB durch Pfeilende minus Pfeilanfang berechnet, also Vektor b minus Vektor a

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

Sicherheitshalber solltest du am Schluss prüfen, dass die Richtungsvektoren nicht parallel sind, also keine Vielfache voneinander sind, denn mit 2 parallelen Richtungsvektoren kann man keine Ebene basteln bzw. aufspannen.

Auf der nächsten Seite wird für diese Variante ein Beispiel vorgerechnet, wie man eine Ebene einfach von Koordinatenform in Parameterform umwandeln kann

Dazu gleich ein **Beispiel:** Gegeben ist die Ebene E in Koordinatenform. Wandle sie in Parameterform um!

$$E: -11x_1 + 6x_2 + x_3 = 10$$

Wir müssen uns einfach 3 Punkte der Ebene herstellen. Dabei schreiben wir die Koordinatenform auf und dürfen uns für zwei der drei x-Werte beliebige Zahlen ausdenken und dann den dritten x-Wert ausrechnen, denn dieser ergibt sich dann automatisch so, dass der Punkt in der Ebene liegt.

Punkt Nummer 1: Nullen sind immer gut, also $x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 0$
Durch einsetzen in die Koordinatenform erhalten wir:

$$E: -11x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 \qquad => \qquad E: -11 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + x_3 = 10 \qquad => \qquad x_3 = 10$$

Nennen wir den entstehenden Punkt A und dieser Punkt A hat die Koordinaten A (0 / 0 / 10)

Punkt Nummer 2: Jetzt könnten wir die anderen beiden x-Werte Null setzen aber leider kommen dann hier in der Aufgabe keine schönen Zahlen raus, weil wir dann z.B. die 10 durch -11 teilen müssten und da kommt eine unschöne periodische Zahl heraus. Also basteln wir uns doch das ganze einfach so zusammen, dass etwas Schönes heraus kommt z.B.
$x_1 = 0 \quad und \quad x_3 = 4$
Durch einsetzen in die Koordinatenform erhalten wir:

$$E: -11x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 \qquad => \qquad E: -11 \cdot 0 + 6 \cdot x_2 + 4 = 10 \qquad => \qquad x_2 = 1$$

Nennen wir den entstehenden Punkt B und dieser Punkt B hat die Koordinaten B (0 / 1 / 4)

Punkt Nummer 3: Auf die genaue Berechnung eines dritten Punktes C verzichte ich hier. Sagen wir einfach mal, dass der Punkt C (0 / 2 / -2) auch ein Punkt der Ebene ist. Wir haben jetzt also insgesamt 3 Punkte, nämlich A (0 / 0 / 10), B (0 / 1 / 4) und C (0 / 2 / -2).

Aus diesen 3 Punkten können wir jetzt die Parameterform der Ebene aufstellen.

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$$

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \\ 4-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Somit haben wir unsere Richtungsvektoren

$$\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ -2-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Am Schluss setzen wir den Stützvektor a und die beiden Richtungsvektoren ein

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC} \qquad => \qquad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Variante 2 zu b) Eine Ebene ist in Koordinatenform gegeben und soll in Parameterform dargestellt werden.

$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$$

Denken wir auch hier wieder daran, dass man für die Parameterform 3 Dinge benötigt, nämlich einen Stützvektor a und 2 Richtungsvektoren v.

Zunächst muss man wieder einen beliebigen Punkt der Ebene bestimmen. Wie das funktioniert, haben wir bereits auf den beiden vorigen Seiten erklärt. Der Ortsvektor dieses Punktes ist der Stützvektor a der Ebene.

Anschließend lesen wir den Normalenvektor n aus der Koordinatengleichung ab, denn die Faktoren bei den x-Komponenten sind ja die Komponenten des Normalenvektors n

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Mithilfe des Normalenvektors n können wir die Richtungsvektoren v bestimmen. Da der Normalenvektor n senkrecht zu den Richtungsvektoren v verläuft, ist das Skalarprodukt von Normalenvektor und Richtungsvektor gleich Null. Wir erhalten folgenden Ansatz:

$$\vec{n} * \vec{v} = 0$$

Schreiben wir die Vektoren mit Komponenten, dann erhalten wir links eine Vektorgleichung, die rechts dann mittels Skalarprodukt vereinfacht wurde:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad => \qquad n_1 \cdot v_1 + n_2 \cdot v_2 + n_3 \cdot v_3 = 0$$

Mit der Gleichung rechts können wir uns nun beliebig viele Vektoren bestimmen, die senkrecht zum Normalenvektor n verlaufen, indem wir für 2 beliebige Komponenten der insgesamt 3 Komponenten des Richtungsvektors v beliebige Zahlen einsetzen. Die Gleichung kann dann nach der dritten unbekannten Komponente aufgelöst werden. So stellen wir uns 2 Richtungsvektoren v für unsere Parameterform der Ebene her.

Am Schluss brauchen wir nur noch den bereits bestimmten Stützvektor a und die beiden Richtungsvektoren v in folgende Parameterform einsetzen

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2$$

Auf der nächsten Seite wird ein Beispiel vorgerechnet

Beispiel zur Variante 2 zu b) Gegeben ist die Ebene E in Koordinatenform. Wandle sie in Parameterform um!

$$E: -11x_1 + 6x_2 + x_3 = 10$$

Bei dieser Variante benötigen wir einen Punkt der Ebene. Dazu schreiben wir uns die Ebene in Koordinatenform auf und denken uns für zwei der drei x-Werte beliebige Zahlen aus. Hier bietet sich z.B. an, dass man $x_1 = 0 \quad und \quad x_2 = 0$ setzt. Man kann, wie gesagt, an dieser Stelle frei wählen. Die Null ist meist praktisch, aber auch andere Werte kann man sich so aussuchen, dass die Aufgabe eben gut aufgeht. Wir haben, wie gesagt, zweimal die Null gewählt und erhalten:

$$E: -11x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 \quad => \quad E: -11 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + x_3 = 10 \quad => \quad x_3 = 10$$

Wir haben zwei x-Werte frei gewählt und wenn wir diese in die Koordinatenform einsetzen, dann ergibt sich der dritte x-Wert automatisch so, dass wir einen Punkt der Ebene erhalten, nennen wir diesen Punkt einfach mal A (0 / 0 / 10). Diesen Punkt können wir als Stützvektor der Ebene benutzen

Jetzt brauchen wir noch 2 Richtungsvektoren der Ebene und dabei ist der Normalenvektor nützlich, den wir praktischerweise in der Koordinatenform ablesen können:

$$E: -11x_1 + 6x_2 + x_3 = 10 \quad => \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor n steht ja senkrecht auf der Ebene und deshalb verlaufen die Richtungsvektoren auch senkrecht zum Normalenvektor. Bei senkrecht fällt uns doch sofort das Skalarprodukt ein. Das Skalarprodukt von 2 Vektoren ist nämlich Null, wenn die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Daraus ergibt sich folgender Ansatz: $\vec{n} * \vec{v} = 0$

Als nächstes setzen wir den Normalenvektor ein, schreiben den Richtungsvektor v mit Komponenten und multiplizieren das Skalarprodukt aus:

$$\vec{n} * \vec{v} = 0 \quad => \quad \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \quad => \quad -11v_1 + 6v_2 + v_3 = 0$$

Die Aufgabe wird auf der nächsten Seite fortgesetzt.

Mit der rechten Gleichung auf der vorigen Seite sind wir nun in der Lage, Richtungsvektoren der Ebene zu bestimmen, indem wir uns zwei beliebige v-Werte ausdenken und somit den dritten v-Wert berechnen können. Man kann hier leider nicht zwei v-Werte gleich Null setzen, denn dadurch wird dann automatisch der dritte v-Wert auch gleich Null (nur so wäre die Gleichung dann lösbar) und als Ergebnis hätten wir dann den Nullvektor (ein Vektor, bei dem alle Komponenten Null sind) und der zeigt leider in keine Richtung und ist somit als Richtungsvektor unbrauchbar. Wir müssen uns also andere Werte ausdenken, wobei aus Gründen der Vereinfachung schon 1mal die Null drin sein darf.

Ich wähle mal $v_1 = 0 \quad und \quad v_3 = 12$ und durch einsetzen und auflösen erhalten wir:

$$-11v_1 + 6v_2 + v_3 = 0 \qquad => \qquad -11 \cdot 0 + 6 \cdot v_2 + 12 = 0 \qquad => \qquad v_2 = -2$$

Wir erhalten also als ersten Richtungsvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$

Wir brauchen ja noch einen zweiten Richtungsvektor und für den wähle ich einfach mal $v_1 = 1 \quad und \quad v_2 = 2$ und durch einsetzen in die bekannte Gleichung erhalten wir

$$-11v_1 + 6v_2 + v_3 = 0 \qquad => \qquad -11 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + v_3 = 0 \qquad => \qquad v_3 = -1$$

Wir erhalten somit als zweiten Richtungsvektor: $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Wir haben jetzt insgesamt einen Stützvektor a und zwei Richtungsvektoren, nämlich v und w. Diese Daten brauchen wir jetzt nur noch in die folgende Parameterform einsetzen und sind fertig

$$E : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} \qquad => \qquad E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Streng genommen muss man am Schluss noch abchecken, dass die beiden Richtungsvektoren nicht parallel sind, denn dann würden sie keine Ebene aufspannen. Dies kann man mit bloßem Auge, denn wenn sie parallel wären, dann wären sie Vielfache voneinander. Wer an der Stelle was rechnen will, der kann auch mit dem Ansatz $k \cdot \vec{v} = \vec{w}$ zeigen, dass die Richtungsvektoren nicht parallel sind. In der Praxis ist es sehr unwahrscheinlich, dass man hier 2 parallele Richtungsvektoren zufällig erhält.

Übrigens nicht dadurch verwirren lassen, dass diese Parameterform anders aussieht als die Lösung der Variante 1. Unterschiedliche Parameterformen können trotzdem ein und dieselbe Ebene darstellen.

Variante 3 zu b): Diese Variante ist wahrscheinlich die beste und schnellste, hat aber einen kleinen Haken, da sie an einer Stelle etwas verwirrend ist.

Versuchen wir uns doch gleich an der Beispielaufgabe.

Beispiel zur Variante 3 zu b) Gegeben ist die Ebene E in Koordinatenform. Wandle sie in Parameterform um!

$$E: -11x_1 + 6x_2 + x_3 = 10$$

Wir wollen ja von der Koordinatenform zur Parameterform und in der Parameterform einer Ebene sind ja 2 Parameter drin. Die müssen ja irgendwo herkommen und da wählt man einfach mal $x_1 = r \quad und \quad x_2 = s$. Die Auswahl der x-Werte ist beliebig, beeinflusst aber, wie einfach oder schwierig es weitergeht. Wähle möglichst die x-Werte als Parameter, bei denen keine schöne Zahl, wie z.B. 1 oder 2, dabei steht. In unserem Beispiel ist bei x_3 eine schöne 1 und deswegen sind die anderen beiden x-Werte die Parameter r und s.

Durch Einsetzen in die Koordinatenform erhalten wir:

$$E: -11 \cdot r + 6 \cdot s + x_3 = 10$$

Diese Gleichung lösen wir nach x_3 auf und erhalten

$$x_3 = 10 + 11r - 6s$$

Wir haben jetzt insgesamt also 3 Gleichungen, wobei die ersten beiden einfach so definiert wurden und die dritte ergab sich dann durch einsetzen und auflösen.

$$\begin{aligned} x_1 &= r \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 10 + 11r - 6s \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 0 + 1r + 0s \\ x_2 &= 0 + 0r + 1s \\ x_3 &= 10 + 11r - 6s \end{aligned}$$

Von links nach rechts wurden die „Lücken“ aufgefüllt. Es ist wichtig, dass die 3 Gleichungen so sortiert werden, also zuerst die Zahl und dann nacheinander die beiden Parameter r und s. Aus diesen 3 Gleichungen können wir nun die Parameterform aufstellen, und dazu braucht man die 3 benötigten Vektoren einfach nur nacheinander Spaltenweise ablesen

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Und schon ist die Parameterform fertig. Dieses Verfahren funktioniert wirklich sehr schnell und einfach, setzt aber voraus, dass man die 3 Gleichungen (voriger Kasten links) sortieren und dann die Parameterform rausziehen kann.