1. Von Parameterform in …

a) Allgemeine Normalenform (ANF) b) Koordinatendarstellung

Variante 1 zu a) Gegeben ist eine Ebene in Parameterform und die Ebene soll in die Allgemeine Normalenform (ANF) umgewandelt werden

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2$$

Zunächst muss aus den beiden Richtungsvektoren v der Normalenvektor n entweder mit dem Vektorprodukt (Kreuzprodukt), mit Hilfe der Determinantenrechnung oder mit dem Skalarprodukt bestimmt werden. Ich empfehle den Normalenvektor n mithilfe der Determinantenrechnung zu bestimmen. Wie das funktioniert, lies bitte im Kapitel „Normalenvektor“ (S.31) nach. Falls du unbedingt den Normalenvektor über das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) bestimmen willst, dann lies bitte im Kapitel „Vektorprodukt“ (S.18) nach.

Wenn du den Normalenvektor n bestimmt hast, setze diesen und den Stützvektor a der Parameterform in eine der 3 folgenden Darstellungsformen für die Allgemeine Normalenform ein. Der Vektor x bleibt so stehen.

1.) $E: \vec{n} * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$
2.) $E: \vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{a}$
3.) $E: \vec{n} * \vec{x} = d \qquad mit \qquad d = \vec{n} * \vec{a}$

Wenn du bei Version 2 das Skalarprodukt auf der rechten Seite ausrechnest, dann erhältst du automatisch Version 3. **Auf der folgenden Seite wird ein konkretes Beispiel vorgerechnet, wie so eine Umformung von Parameterform in ANF genau aussieht.**

Variante 2 zu a): Diese Variante wird nicht wirklich angewendet, stellt aber schön den Zusammenhang zwischen Parameterform und ANF her. Zunächst muss man wieder den Normalenvektor n (mit welcher Methode auch immer) bestimmen. Mit diesem Normalenvektor n wird dann auf beiden Seiten der Parameterform das Skalarprodukt gebildet.

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2 \quad \Big| * \vec{n}$$
$$\vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * (\vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2)$$
$$\vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{a} + \lambda \cdot \vec{n} * \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{n} * \vec{v}_2$$
$$\vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{a} + 0 + 0$$
$$\vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{a}$$

Vielleicht fragst du dich, woher in der vorletzten Zeile die beiden Nullen kommen. Das liegt daran, weil der Normalenvektor n senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren v verläuft und das Skalarprodukt von 2 Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, ist eben Null. Dadurch fallen dann auch die beiden Parameter λ und μ raus.

Variante 3 zu a) Man kann auch die Ebene zuerst von Parameterform in die Koordinatenform (S.60) umwandeln und dann von Koordinatenform in die ANF (S.66). Ist zwar nicht der einfachste und schnellste Weg, aber man braucht nicht den Normalenvektor rechnerisch zu bestimmen. Man liest diesen vielmehr aus der Koordinatenform ab. Diese Variante eignet sich also für diejenigen, die nicht wissen, wie man den Normalenvektor bestimmt, die allerdings eine Ebene von Parameterform in Koordinatenform umwandeln können.

Beispiel zu der Variante 1, um eine Ebene von Parameterform in ANF umzuwandeln:

Gegeben ist die folgende Ebene in Parameterform: $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Als erstes muss der Normalenvektor bestimmt werden. Dazu bearbeitet man die Richtungsvektoren mit dem Vektorprodukt (Kreuzprodukt), mit Determinanten oder mit dem Skalarprodukt. In dem Kapitel „Normalenvektor“ (S.30) wird der Normalenvektor der oben gezeigten Ebene mittels Determinanten und Skalarprodukt berechnet. Schau dort nach, wie das genau funktioniert:

Wir erhalten den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Jetzt brauchen wir nur noch diesen Normalenvektor n und den Stützvektor a, den wir aus der Parameterform im zweiten Kasten auf dieser Seite ersehen können (ganz vorne) in die ANF einzusetzen und wir erhalten:

$$E: \vec{n} * (\vec{x} - \vec{a}) = 0 \qquad => \qquad E: \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 0$$