Variante 1 zu b) Gegeben ist eine Ebene in Parameterform und die Ebene soll in die Koordinatendarstellung umgewandelt werden

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2$$

Wir bestimmen auch wieder den Normalenvektor n, der Komponentenweise so dargestellt wird:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Anschließend wird d berechnet und zwar mit $d = \vec{n} * \vec{a}$, wobei der Vektor a der Stützvektor aus der Parameterform ist. Dann braucht man nur noch die Komponenten des Normalenvektors n und d in folgende Gleichung einsetzen.

$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$$

Man gelangt zur Koordinatenform übrigens auch, wenn man eine beliebige Version der Allgemeinen Normalenform (ANF) umformt, indem man die Skalarprodukte der Vektoren berechnet.

Dazu gleich ein **Beispiel**, wie man mit Variante 1 zu b), eine Ebene von Parameterform in Koordinatenform umwandelt: Gegeben ist die Ebene E in Parameterform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen zunächst auch wieder den Normalenvektor (siehe gleichnamiges Kapitel) und

erhalten: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei uns die Komponenten des Normalenvektors die Faktoren (Koeffizienten) der Variablen (x) in der Koordinatenform liefern.

Jetzt berechnen wir die rechte Seite d der Koordinatenform, indem wir das Skalarprodukt von Normalenvektor und Stützvektor der Ebene berechnen.

$$d = \vec{n} * \vec{a} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = (-11) \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = -22 + 24 + 8 = 10 \qquad => \qquad d = 10$$

Mit dem Normalenvektor und der rechten Seite d können wir die Koordinatenform aufstellen:

$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d \qquad => \qquad E: -11x_1 + 6x_2 + x_3 = 10$$

Variante 2 zu b) Es gibt noch eine andere Möglichkeit, eine Ebene von Parameterform in Koordinatendarstellung zu bringen. Diese ist etwas komplizierter, wird allerdings oft im Unterricht angewendet.

Diese Methode heißt **Parametereliminierung**. Diese Bezeichnung ist zutreffend, denn in der Parameterform sind ja die Parameter λ und μ vorhanden, während in der Koordinatendarstellung keine Parameter mehr vorhanden sind, diese wurden sozusagen eliminiert, also vernichtet. Wie funktioniert nun diese Methode:

Zunächst schreiben wir die Ebene in Parameterform auf:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2$$

Damit wir kein Durcheinander mit den Bezeichnungen bekommen, benennen wir nicht beide Richtungsvektoren mit v, sondern den zweiten Richtungsvektor mit w

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{w}$$

Schreiben wir nun die Vektoren mit Komponenten auf

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung wird nun zeilenweise in Komponentengleichungen aufgedröselt

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + v_1\lambda + w_1\mu \\ x_2 &= a_2 + v_2\lambda + w_2\mu \\ x_3 &= a_3 + v_3\lambda + w_3\mu \end{aligned}$$

Wir haben ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Variablen, den Parametern λ und μ, erhalten. Dieses Gleichungssystem muss nun so gelöst werden, dass die Parameter λ und μ eliminiert werden, also verschwinden. Dazu kann man das Einsetzungsverfahren (im nächsten Absatz beschrieben) oder das Additionsverfahren (siehe Beispielaufgabe auf der nächsten Seite) benutzen.

Dazu löst man die erste Gleichung nach λ auf und setzt dies dann in die zweite und dritte Gleichung ein. Dadurch erhalten wir 2 Gleichungen, in denen nur noch der Parameter μ enthalten ist. Wir lösen eine der beiden Gleichungen nach μ auf und setzen dies dann in die andere Gleichung ein. Wir erhalten damit eine Gleichung, in der nur noch die Komponenten des Vektors x und einige Zahlen drin sind. Diese Gleichung sortieren wir, damit wir folgende Form erhalten:

$$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$$

Auf der nächsten Seite siehst du ein Rechenbeispiel zur Anwendung dieses wichtigen Verfahrens.

Beispiel zur Variante 2 zu b), wie man eine Ebene mit Hilfe der Parametereliminierung von Parameterform in Koordinatenform umwandelt.

Gegeben ist die Ebene E in Parameterform $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Als erstes ersetzen wir den Vektor x durch seine Komponenten und wir erhalten:

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 2 + 2s + t \\ x_2 &= 4 + 3s + 2t \\ x_3 &= 8 + 4s - t \end{aligned}$$

Durch aufdröseln der Vektorgleichung in Komponentengleichungen erhalten wir ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Variablen. In diesem Gleichungssystem stören uns jetzt die Parameter s und t, welche wir nun eliminieren müssen (Parametereliminierung). Dazu können wir das Additionsverfahren oder das Einsetzungsverfahren benutzen:

Ich entscheide mich hier mal für das Additionsverfahren, bei dem wir zunächst die Gleichungen mit römischen Zahlen durchnummerieren:

$$\begin{aligned} I \quad & x_1 = 2 + 2s + t \\ II \quad & x_2 = 4 + 3s + 2t \\ III \quad & x_3 = 8 + 4s - t \end{aligned}$$

Entfernen wir zuerst den Parameter s, indem wir die erste Gleichung mit 3 multiplizieren, die zweite Gleichung mit 2 multiplizieren und anschließend die beiden Gleichungen subtrahieren (minus):

$$\begin{aligned} 3 \cdot I: \; & 3x_1 = 6 + 6s + 3t \\ -2 \cdot II \; & \underline{2x_2 = 8 + 6s + 4t} \\ & 3x_1 - 2x_2 = -2 - t \end{aligned}$$

Als nächstes müssen wir noch in der dritten Gleichung das s entfernen. Das kann man mit der ersten oder der zweiten Gleichung umsetzen. Wir multiplizieren hier die erste mit 2, belassen die dritte so wie sie ist und subtrahieren hier wieder:

$$\begin{aligned} 2 \cdot I: \; & 2x_1 = 4 + 4s + 2t \\ -III: \; & \underline{x_3 = 8 + 4s - t} \\ & 2x_1 - x_3 = -4 + 3t \end{aligned}$$

Die Rechnung wird auf der nächsten Seite fortgesetzt

Die Ergebnisse der beiden letzten Rechnungen schreiben wir als neues Gleichungssystem und nummerieren auch wieder mit römischen Zahlen.

$$IV: 3x_1 - 2x_2 = -2 - t$$
$$V: 2x_1 - x_3 = -4 + 3t$$

Bei diesem schon etwas kleineren System muss jetzt t eliminiert werden. Dazu multiplizieren wir die Gleichung IV mit 3, die Gleichung V können wir so lassen und addieren (plus) die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot IV: \quad & 9x_1 - 6x_2 = -6 - 3t \\ +V: \quad & \underline{2x_1 - x_3 = -4 + 3t} \\ & 11x_1 - 6x_2 - x_3 = -10 \end{aligned}$$

Damit wir auf das Gleiche Ergebnis wie bei der vorigen Variante kommen, multiplizieren wir die letzte Gleichung mit -1 und erhalten dann für die Koordinatengleichung der Ebene E:

$$E: -11x_1 + 6x_2 + x_3 = 10$$

Es ist typisch, dass für die Koordinatenform unterschiedliche Versionen heraus kommen, wenn man unterschiedliche Verfahren anwendet. Durch Multiplikation oder Division kann man aber zeigen, dass es sich immer um ein und dieselbe Ebene handelt