3.1.3. Die Hesse Normalenform (HNF)

Die Hesse Normalenform (HNF) ist eine Weiterentwicklung der Allgemeinen Normalenform (ANF), die wir auf der vorigen Seite kennen gelernt haben. Dabei wird der Normalenvektor durch den Einheitsnormalenvektor ersetzt. Der Normalenvektor ist ja ein Vektor, der senkrecht zur Ebene verläuft. Der Einheitsnormalenvektor ist auch ein Normalenvektor, verläuft also auch senkrecht zur Ebene, hat allerdings noch zusätzlich die Eigenschaft, dass seine Länge, also sein Betrag, eine Einheit ist.

Wie wandelt man nun den Normalenvektor in den Einheitsnormalenvektor um. Dazu teilt man den Normalenvektor durch seinen Betrag. Da man Vektoren allerdings nicht teilen kann, multipliziert man den Normalenvektor mit einem Bruch und der Nenner dieses Bruches ist der Betrag des Normalenvektors. Mathematisch ausgedrückt:

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \quad \textit{oder besser} \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \vec{n}_0 = \textit{Einheitsnormalenvektor} \\ \vec{n} = \textit{Normalenvektor} \\ |\vec{n}| = \textit{Betrag des Normalenvektors} \end{array}$$

Wenn man, wie gesagt, in der Allgemeinen Normalenform (ANF), die links abgebildet ist, überall den Normalenvektor durch den Einheitsnormalenvektor ersetzt, dann erhält man die Hesse Normalenform (HNF), die rechts abgebildet ist.

ANF: $E: \vec{n} * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ => HNF: $E: \vec{n}_0 * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$

Wenn man nun den Einheitsnormalenvektor durch obigen Ausdruck ersetzt und einige Umformungen vornimmt erhält man:

$$E: \vec{n}_0 * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

$$E: \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} * (\vec{x} - \vec{a}) = 0$$

$$E: \frac{\vec{n} * (\vec{x} - \vec{a})}{|\vec{n}|} = 0$$

$$E: \frac{\vec{n} * \vec{x} - \vec{n} * \vec{a}}{|\vec{n}|} = 0$$

$$E: \frac{n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 - d}{|\vec{n}|} = 0 \quad \textit{mit} \quad d = \vec{n} * \vec{a}$$

Was kann man nun mit diesem Monstrum an Ausdruck anfangen bzw. was ist die Anwendung dieser umgeformten HNF:
Wenn man für die Komponenten x die Komponenten eines Punktes einsetzt, der in der Ebene liegt, dann erhält man auf der linken Seite das Ergebnis 0. Setzt man allerdings die x-Komponenten eines Punktes ein, der nicht in der Ebene liegt, dann erhält man auf der linken Seite als Ergebnis den Abstand dieses Punktes von der Ebene. Setzt man für die x-Komponenten den Ursprung (0/0/0) ein, so erhält man den Abstand der Ebene vom Ursprung

Auf der nächsten Seite findest du ein Beispiel, wie man eine Ebene von Allgemeiner Normalenform (ANF) in Hesse-Normalenform (HNF) umwandelt.

Beispiel: Umwandlung einer Ebene von Allgemeine Normalenform (ANF) in Hesse Normalenform (HNF)

Gegeben ist die Ebene E in ANF $E: \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 0$

Als erstes müssen wir den Normalenvektor in den Einheitsnormalenvektor umwandeln. Gemäß den Ausführungen auf der vorigen Seite funktioniert das mit dem folgenden Ansatz

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \quad \textit{oder besser} \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \vec{n}_0 = \textit{Einheitsnormalenvektor} \\ \vec{n} = \textit{Normalenvektor} \\ |\vec{n}| = \textit{Betrag des Normalenvektors} \end{array}$$

Wir müssen also den Normalenvektor durch seinen Betrag teilen oder mit dem Ausdruck „1 durch Betrag Normalenvektor“ multiplizieren.
Wir bilden also auf jeden Fall zuerst den Betrag des Normalenvektors (in der ANF außerhalb der Klammer):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad => \quad |\vec{n}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 0 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

Um den Einheitsnormalenvektor zu bestimmen, müssen wir jede Komponente des Normalenvektors n durch 5 teilen oder mit $\frac{1}{5}$ mal nehmen

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \quad \textit{oder besser} \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \quad => \quad \vec{n}_0 = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{0}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0 \\ 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Es ist typisch, dass beim Einheitsnormalenvektor unschöne Zahlen wie z.B. Brüche, die man teilweise auch nicht in etwas bessere Dezimalzahlen umwandeln kann, drin sind.

Auf jeden Fall haben wir jetzt den Einheitsnormalenvektor und können den Normalenvektor der ANF durch den Einheitsnormalenvektor ersetzen und erhalten somit die HNF:

$$ANF: \quad E: \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad => \quad HNF: \quad E: \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ 0 \\ 0{,}6 \end{pmatrix} * \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 0$$

An dieser Stelle sei noch mal erwähnt, dass man auf der linken Seite den Abstand eines Punktes zur Ebene erhält, wenn man in die HNF die Punktkoordinaten für den Vektor x einsetzt.