1.12.1. Normalenvektor

Der Normalenvektor ist ein Vektor, der senkrecht zu einer Ebene verläuft. Jede Ebene hat mehrere Normalenvektoren, die sich lediglich durch ihre Länge unterscheiden. Alle haben allerdings gemeinsam, dass sie senkrecht zur Ebene verlaufen. Sie müssen übrigens nicht genau auf der Ebene beginnen, denn man kann ja auch andere Vertreter eines bestimmten Normalenvektors benutzen.

Wie berechnet man nun den Normalenvektor? :

Möglichkeit 1: Das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren einer Ebene ergibt den Normalenvektor. Lies evtl. im Kapitel „Vektorprodukt“ (S.18) nach.

Möglichkeit 2: Der Normalenvektor kann aber auch aus den Richtungsvektoren der Ebene mithilfe der Determinantenrechnung bestimmt werden.

Möglichkeit 3: Mit den beiden Richtungsvektoren (Nennen wir diese hier Vektor AB und Vektor AC) der Ebene kann man auch den Normalenvektor bestimmen.
Entscheidend ist dann allerdings folgender Ansatz, der gilt, weil der Normalenvektor senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren AB und AC verläuft. Weitere Grundlage ist die Eigenschaft des Skalarprodukt (S.17), denn das ergibt Null, wenn zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Wir erhalten:

$$\vec{n} * \vec{AB} = 0 \qquad wegen \qquad \vec{n} \perp \vec{AB}$$

$$\vec{n} * \vec{AC} = 0 \qquad wegen \qquad \vec{n} \perp \vec{AC}$$

Wir setzen anschließend für den Normalenvektor n folgendes ein: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$

Da für die Vektoren AB und AC ja auch Vektoren mit richtigen Zahlen eingesetzt werden können, erhalten wir durch Auflösen des Skalarproduktes 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten (die Komponenten des Normalenvektors n)

Wir haben, wie gesagt, ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Variablen, welches als Lösung entweder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen zulässt. Falls dir das nicht logisch erscheint bzw. wenn du wissen willst, wie man ein solches Gleichungssystem löst, dann lies im Kapitel „Lineare Gleichungssysteme“ (Band 1) noch mal nach.

Da jede Ebene unendlich viele Normalenvektoren hat, wird als Lösung des Gleichungssystems unendlich viele Lösungen herauskommen, wobei wir eine von den unendlich vielen Lösungen bestimmen können, indem wir uns eine Zahl für eine Komponente des Normalenvektors ausdenken.

Anmerkung: Ich persönlich bevorzuge die Berechnung des Normalenvektors mithilfe der Determinantenrechnung (Möglichkeit 2) und auf der folgenden Seite findest du dazu ein Beispiel.

Beispiel zur Bestimmung des Normalenvektors mithilfe der Determinantenrechnung (siehe Möglichkeit 2):

Gegeben sind 2 Vektoren a und b als Richtungsvektoren einer Ebene

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad und \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Berechnet werden soll der Normalenvektor n, der das Ergebnis des Vektorproduktes der Vektoren a und b ist, das hier allerdings mithilfe der Determinantenrechnung bestimmt wird

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Die beiden Vektoren a und b schreibt man waagrecht untereinander, wobei die ersten beiden Komponenten wiederholt werden:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{matrix}$$

Die erste Spalte ignorieren wir und teilen dann den verbleibenden Ausdruck in 3 gleich große Stücke, wobei ein Stück aus 4 Buchstaben besteht. Die so entstehenden quadratischen Determinanten werden folgendermaßen aufgelöst:

Erste Diagonale (von links oben nach rechts unten) minus zweite Diagonale (von links unten nach rechts oben)

$$n_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3$$

$$n_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1$$

$$n_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$$

Der gesuchte Normalenvektor n ergibt sich dann aus den einzelnen Komponenten n

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Das Ganze war jetzt sehr theoretisch. Deshalb auf der nächsten Seite ein Beispiel mit Zahlen. Dies wird zunächst mit Hilfe der Determinantenrechnung und anschließend mit der anderen Methode über das Skalarprodukt gerechnet.

Beispielaufgabe mit Zahlen: Gegeben ist die Ebene E in Parameterform und gesucht ist der Normalenvektor der Ebene:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme den Normalenvektor mit Hilfe der Determinantenrechnung (diese Seite)
b) Bestimme den Normalenvektor mit Hilfe des Skalarproduktes (nächste Seite)

Lösungsweg zu a) Gegeben sind 2 Richtungsvektoren der Ebene E, nennen wir sie Vektor a und Vektor b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad und \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Berechnet werden soll der Normalenvektor n, der das Ergebnis des Vektorproduktes der Vektoren a und b ist, das hier allerdings mithilfe der Determinantenrechnung bestimmt wird

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Die beiden Vektoren a und b schreiben wir waagrecht untereinander, wobei die ersten beiden Komponenten wiederholt werden:

$$\begin{matrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Die erste Spalte ignorieren wir und teilen dann den verbleibenden Ausdruck in 3 gleich große Stücke, wobei ein Stück ein Quadrat aus 4 Zahlen ist. Die so entstehenden quadratischen Determinanten werden folgendermaßen aufgelöst:

Erste Diagonale (von links oben nach rechts unten) minus zweite Diagonale (von links unten nach rechts oben)

$$n_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4 = -3 - 8 = -11$$

$$n_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 4 + 2 = 6 \qquad => \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$n_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 4 - 3 = 1$$

Die einzelnen Komponenten des Normalenvektors fassen wir zum Normalenvektor zusammen

Lösungsweg zu b) Wir wissen, dass das Skalarprodukt von einem Richtungsvektor (hier Vektor a oder Vektor b) und dem Normalenvektor n Null ergibt, da diese senkrecht zueinander stehen. Wir erhalten folgende Ansätze:

$$\begin{array}{lll} \vec{n} * \vec{a} = 0 & \textit{wegen} & \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} * \vec{b} = 0 & \textit{wegen} & \vec{n} \perp \vec{b} \end{array} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir die Vektoren einsetzen erhalten wir:

$$\vec{n} * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \textit{und} \quad \vec{n} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \qquad => \qquad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad \textit{und} \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Von links nach rechst wurde der Normalevektor einfach nur mit Komponenten versehen.

Als nächstes muss das Skalarprodukt aufgelöst werden (Das mal das plus das mal das…). Falls du nicht mehr weißt, wie das geht, dann schau im Kapitel Skalarprodukt (S.17) nach.

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \quad => \quad 2n_1 + 3n_2 + 4n_3 = 0 \qquad \textit{und} \qquad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad => \quad n_1 + 2n_2 - n_3 = 0$$

Wir erhalten also ein kleines Lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Variablen.

$$\begin{aligned} 2n_1 + 3n_2 + 4n_3 &= 0 \\ n_1 + 2n_2 - n_3 &= 0 \end{aligned}$$

Ein Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen hat entweder keine oder unendlich viele Lösungen, was hier auch logisch ist, denn es gibt ja auch unendlich viele Normalenvektoren, die zwar alle in die gleiche Richtung zeigen (senkrecht zur Ebene), aber alle unterschiedlich lang sind. Um jetzt einen von diesen vielen Normalenvektoren bestimmen zu können, dürfen wir uns jetzt hier, da mehr Variablen als Gleichungen, für eine Variable ein Zahl frei wählen. Ich wähle einfach mal $n_3 = 1$. Theoretisch ist alles denkbar außer die Null, denn wenn man die Null wählt, dann werden die anderen Variablen auch null (nur so wären dann die beiden Gleichungen lösbar) und der Normalenvektor kann nicht der Nullvektor (alle Komponenten gleich Null) sein, denn der Nullvektor zeigt in keine Richtung und ist somit als Normalenvektor unbrauchbar.. Was wäre noch sinnvoll gewesen. Man wählt die Zahl so, dass die Zahlen bei den Variablen (Faktoren) in die gewählte Zahl reingehen. In unserem Beispiel wäre die 12 ganz gut (Gemeinsames Vielfaches von 1,2, 3 und 4). Wie auch immer, wenn wir $n_3 = 1$ wählen, erhalten wir folgendes Gleichungssystem, das man dann mit einem beliebigen Verfahren (Einsetzungsverfahren oder Additionsverfahren) lösen kann. Die Lösungen sind dann die Komponenten des Normalenvektors n. Nicht vergessen: $n_3 = 1$

$$\begin{array}{lll} 2n_1 + 3n_2 + 4n_3 = 0 & => & 2n_1 + 3n_2 + 4 = 0 \\ n_1 + 2n_2 - n_3 = 0 & => & n_1 + 2n_2 - 1 = 0 \end{array} \quad => \quad n_1 = -11 \quad / \quad n_2 = 6 \quad => \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -11 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wichtige Anmerkung: Beim Lösungsweg b) muss übrigens nicht genau der gleiche Normalenvektor rauskommen wie beim Lösungsweg a). Das hängt davon ab, welchen Wert man sich ausgedacht hat, allerdings müssen die Ergebnisse Vielfache voneinander sein, denn beides sind Normalenvektoren, nur mit unterschiedlichen Längen.