3.1.1.1. Aufstellen der Parameterform von Ebenen: Man braucht immer 3 Dinge, nämlich einen Stützvektor, der vom Ursprung zu einem Punkt auf der Ebene führt, und zwei Richtungsvektoren, die die Ebene aufspannen.

Möglichkeit 1: Gegeben ist ein Punkt der Ebene und zwei Richtungsvektoren und gesucht ist die Ebene, die durch den gegebenen Punkt verläuft und durch die Richtungsvektoren aufgespannt wird. Die Richtungsvektoren dürfen übrigens nicht parallel sein.

Beispielaufgabe: Gegeben ist der Punkt A mit den Koordinaten (3/4/1). Weiterhin sind folgende Richtungsvektoren gegeben

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad und \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Als Stützvektor kann man den Ortsvektor des Punktes A benutzen, denn dieser führt vom Ursprung zu dem Punkt A und da der Punkt A ein Punkt der Ebene ist, kann man den Ortsvektor des Punktes A als Stützvektor benutzen. Wir erhalten;

$$E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v}_1 + \mu \cdot \vec{v}_2$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Man muss sich erst daran gewöhnen, dass dieser Ausdruck schon die Lösung ist, also dieser Ausdruck stellt eine Ebene dar.

Möglichkeit 2: Gegeben sind 3 Punkte und gesucht ist eine Ebene, die durch die drei Punkte verläuft.

Beispielaufgabe: Gegeben sind die Koordinaten der Punkte A (2/4/6) und B (5/6/7) und C(1/3/5).

Wir benötigen wieder einen Stützvektor und zwei Richtungsvektoren. Als Stützvektor können wir einen der drei Ortsvektoren zu den Punkten A, B oder C benutzen, da alle drei ja Punkte der Ebene sein sollen. Als Richtungsvektoren können wir die Vektoren AB und AC benutzen oder die Vektoren BA und BC oder die Vektoren CA und CB. **Wir erkennen, dass für ein und dieselbe Ebene unterschiedliche Parameterformen existieren, wobei die Varianten 1 bis 3 am einfachsten nachzuvollziehen sind. Die Variante 4 funktioniert auch, erschließt sich aber nicht so schön wie die anderen Varianten. Die Variante 4 repräsentiert eine von den vielen anderen Varianten, die weiterhin noch existieren.**

1. $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC}$
2. $E: \vec{x} = \vec{b} + \lambda \cdot \vec{BA} + \mu \cdot \vec{BC}$
3. $E: \vec{x} = \vec{c} + \lambda \cdot \vec{CA} + \mu \cdot \vec{CB}$
4. $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{BA} + \mu \cdot \vec{CB}$

Wir entscheiden uns für Variante 1 und erhalten für die Richtungsvektor AB und AC durch den Ansatz Pfeilende minus Pfeilanfang:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 6-4 \\ 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 3-4 \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Variante 1: $E: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{AB} + \mu \cdot \vec{AC}$ => $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Möglichkeit 3: Gegeben ist ein Punkt A und die Parameterform einer Geraden und beides soll in der Ebene enthalten sein.

Wir brauchen wieder einen Stützvektor und zwei Richtungsvektoren. Als Stützvektor können wir den Ortsvektor des Punktes A oder den Stützvektor der Geraden benutzen. Jetzt brauchen wir noch 2 Richtungsvektoren. Richtungsvektor Nummer eins ist der Richtungsvektor der Geraden und den Richtungsvektor Nummer zwei basteln wir aus dem Stützvektor der Geraden und dem Ortsvektor des gegebenen Punktes A mittels Pfeilende minus Pfeilanfang.

Möglichkeit 4: Gegeben sind zwei parallele Geraden in Parameterform und beide Geraden sollen in der Ebene enthalten sein.

Wir brauchen wieder einen Stützvektor und zwei Richtungsvektoren. Als Stützvektor können wir einen der beiden Stützvektoren der beiden Geraden benutzen. Jetzt brauchen wir noch zwei Richtungsvektoren. Richtungsvektor Nummer eins ist einer der beiden Richtungsvektoren der Geraden. Für den Richtungsvektor Nummer zwei können wir leider nicht den Richtungsvektor der anderen Geraden benutzen, da dieser ja parallel zu dem ersten Richtungsvektor ist und mit 2 parallelen Richtungsvektoren kann man keine Ebene aufspannen. Den zweiten Richtungsvektoren basteln wir uns aus den beiden Stützvektoren der beiden Geraden mittels Pfeilende minus Pfeilanfang.

Abschlussbemerkung zur Konstruktion von Ebenen.

Wir haben gerade 4 Möglichkeiten kennen gelernt, wie man eine Ebene unter gewissen Umständen konstruieren kann. Die größte Praxisrelevanz hat die Möglichkeit 2, nämlich wie man aus 3 gegebenen Punkten eine Ebene bastelt. So leicht wie in Möglichkeit 1, bei der nämlich schon alles (Stützvektor und Richtungsvektoren) gegeben ist, bekommt man es normalerweise nicht gemacht. Möglichkeit 3 und 4 kommen selten vor, aber wer diese Konstruktionsmöglichkeit verstanden hat, der hat schon ein gutes Gefühl für die Funktionsweise von Vektoren bekommen.