3.1.1.2. Anwendungsmöglichkeiten der Parameterform von Ebenen

1. Anwendungsmöglichkeit:

Man kann durch einsetzen von Zahlen für die Parameter λ und μ beliebig viele Punkte der Ebene bestimmen.

2. Anwendungsmöglichkeit:

Man kann die **Punktprobe** durchführen, indem man den Ortsvektor des zu prüfenden Punktes für den Vektor x in die Parameterform der Geraden einsetzt. Man kann so prüfen, ob ein gegebener Punkt in der Ebene liegt oder nicht.

Zu den beiden Anwendungsmöglichkeiten eine Beispielaufgabe:

Gegeben ist die Parameterform der Ebene
$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestimme einen beliebigen Punkt der Ebene E, indem du für die Parameter λ und μ beliebige Werte einsetzt, sagen wir $\lambda=1$ und $\mu=2$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+6 \\ 2+4+8 \\ 3+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Der Punkt mit den Koordinaten (9/14/8) liegt in der Ebene E.

Prüfe, ob die Punkte C (12/18/10) und D (11/19/9) in der Ebene E liegen, indem du für den Vektor x die entsprechenden Ortsvektoren der Punkte in die Parameterform einsetzt.

Punktprobe für den Punkt C

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punktprobe für den Punkt D

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 12\\18\\10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2\\4\\1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3\\4\\2 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} 11\\19\\9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\2\\3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2\\4\\1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3\\4\\2 \end{pmatrix}$$

Die Vektorgleichung wird zeilenweise in die Komponentengleichungen aufgedröselt und wir erhalten ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Variablen (λ und μ).

$$12 = 1 + 2\lambda + 3\mu$$
 $11 = 1 + 2\lambda + 3\mu$ $18 = 2 + 4\lambda + 4\mu$ und $19 = 2 + 4\lambda + 4\mu$ $9 = 3 + \lambda + 2\mu$

Diese beiden Gleichungssysteme lösen wir getrennt voneinander, z.B. mit dem Einsetzungsverfahren oder einem anderen Verfahren, das wir beherrschen. Erhalten wir als Lösung jeweils einen Wert als Lösung für die Parameter λ und μ , wobei diese nicht identisch sein müssen, dann liegt der Punkt in der Ebene. Erhalten wir während dem Rechenverlauf einen Widerspruch, dann ist das Gleichungssystem nicht lösbar und wir schließen daraus, dass der Punkt nicht in der Ebene liegt.

In obiger Aufgabe werden wir feststellen, dass der Punkt C in der Ebene liegt ($\lambda = 1$ und $\mu = 3$), während der Punkt D nicht in der Ebene liegt (Widerspruch beim lösen des Gleichungssystems). Probier doch mal selber auf die Ergebnisse zu kommen, indem du die Gleichungssystem mit einem Verfahren deine Wahl löst.

Wichtig: An dieser Stelle noch einige Anmerkungen zu Situationen, die beim Lösen der Gleichungssysteme auftreten können, wenn man z.B. mit dem Einsetzungsverfahren das Gleichungssystem löst, welches bei einem Gleichungssystem der Art 3 Gleichungen und 2 Variablen immer sehr gut funktioniert:

- a) Man erhält für λ zwei Mal den gleichen Wert, alles in Ordnung, der Punkt liegt in der Ebene.
- b) Man erhält für λ den Wert 2 und in der anderen Zeile die Aussage 0 = 0. Auch dann ist alles in Ordnung und der Punkt liegt in der Ebene.
- c) Man erhält für λ unterschiedliche Werte, dann handelt es sich um einen Widerspruch und der Punkt liegt nicht in der Ebene.
- d) Man erhält für λ den Wert 2 und in der anderen Zeile die Aussage 0 = 5, dann handelt es sich um einen Widerspruch und der Punkt liegt nicht in der Ebene.