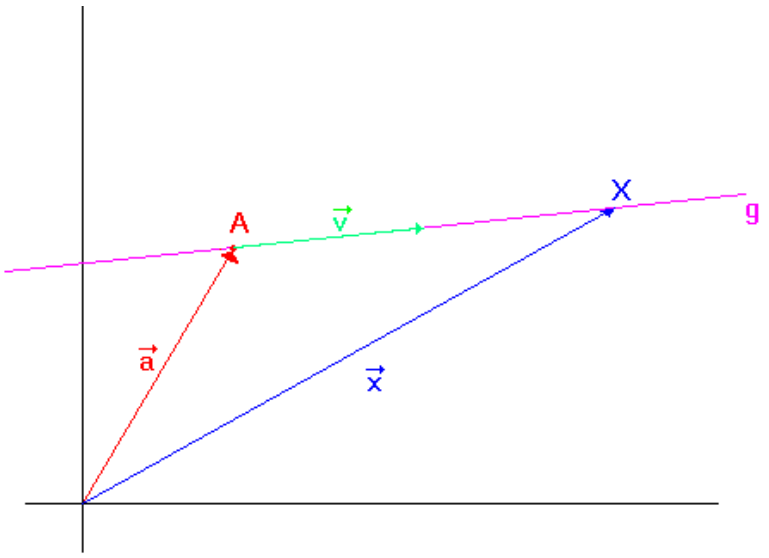
2. Geraden

2.1. Parameterform von Geraden

In der Analysis haben wir schon Geraden der Form y = mx + b kennen gelernt. Auch in der Linearen Algebra kann man Geraden, allerdings mittels Vektoren darstellen und zwar folgendermaßen:

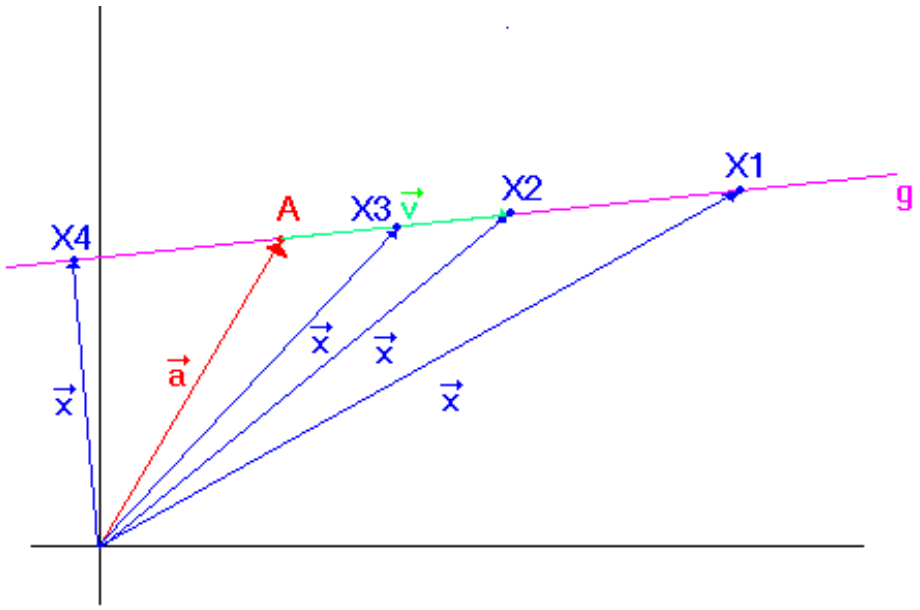
$$g : \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} g &= \text{Die Gerade g} \\ \vec{a} &= \text{Stützvektor (Ortsvektor)} \\ \vec{v} &= \text{Richtungsvektor} \\ \lambda &= \text{Parameter} \\ \vec{x} &= \text{Vektor zu jedem beliebigem} \\ &\quad\ \text{Punkt der Geraden} \end{aligned}$$

Dass man eine Gerade tatsächlich so darstellen kann, sehen wir in der folgenden Skizze. Dargestellt wird die lilafarbene Gerade g (Geraden werden immer mit kleinen Buchstaben beschriftet). Man benötigt dazu 2 Dinge, nämlich einen Stützvektor und einen Richtungsvektor. Der Stützvektor (Vektor a) führt vom Ursprung zu einem Punkt (A) auf der Geraden. Da der Stützvektor im Ursprung beginnt, ist er auch ein Ortsvektor. Man kann auch sagen, dass der Stützvektor die Gerade stützt. Der Richtungsvektor (Vektor v) ist ein Vektor, der in Richtung der Geraden zeigt. Mit den beiden Dingen Stützvektor und Richtungsvektor kann man eine Gerade aufstellen. Welche Bedeutung haben nun noch Vektor x und der Parameter λ. Der Vektor x ist ein Vektor, der zu jedem beliebigen Punkt der Geraden führt. Der Parameter λ sorgt lediglich dafür, dass der Richtungsvektor länger oder kürzer gemacht wird:



Schau dir obige Skizze noch mal an und versuche die Parameterform der Geraden zu verstehen. Was dahinter steckt, ist nämlich Vektoraddition. Der Vektor x führt vom Ursprung zu einem beliebigem Punkt (X) auf der Geraden. Zu diesem Punkt X gelangt man aber auch, wenn man vom Ursprung aus zuerst den Stützvektor a und dann den durch den Parameter λ verlängerten Richtungsvektor v folgt. Versuch jetzt zu verstehen, dass die linke Seite der Parameterform identisch mit der rechten Seite ist.

Zum besseren Verständnis des soeben erklärten Zusammenhanges, schau dir bitte folgende Skizze an. Überlege, welchen Wert der Parameter λ annehmen muss, um die verschiedenen X-Punkte zu erreichen. Denke daran, dass der Wert des Parameters λ den Richtungsvektor v verlängert bzw. verkürzt.



Um den Punkt X1 zu erreichen, muss der Parameter λ den Wert 2 annehmen. Man geht vom Ursprung mit dem Stützvektor a zu dem Punkt A auf der Geraden g. Dann benutzt man 2-mal den Richtungsvektor v um zu dem Punkt X1 zu gelangen.

Um den Punkt X2 zu erreichen, muss der Parameter λ den Wert 1 annehmen. Man geht vom Ursprung mit dem Stützvektor a zu dem Punkt A auf der Geraden g. Dann benutzt man 1-mal den Richtungsvektor v um zu dem Punkt X2 zu gelangen.

Um den Punkt X3 zu erreichen, muss der Parameter λ den Wert 0,5 annehmen. Man geht vom Ursprung mit dem Stützvektor a zu dem Punkt A auf der Geraden g. Dann benutzt man 0,5-mal den Richtungsvektor v um zu dem Punkt X3 zu gelangen.

Um den Punkt X4 zu erreichen, muss der Parameter λ den Wert -1 annehmen. Man geht vom Ursprung mit dem Stützvektor a zu dem Punkt A auf der Geraden g. Dann benutzt man 1 mal den Richtungsvektor v , allerdings diesmal in die andere Richtung, um zu dem Punkt X4 zu gelangen. Durch das Minuszeichen beim Parameter λ wird der Richtungsvektor in die entgegen gesetzte Richtung gedreht.

Man erkennt hier ganz klar, dass durch den Parameter λ der Richtungsvektor verlängert bzw. verkürzt wird, und dadurch kann man jeden beliebigen Punkt der Geraden g ansteuern, nachdem man mit dem Stützvektor auf die Gerade gesprungen ist.