4.5. Winkelberechnungen

Im Zusammenhang mit Vektoren, Geraden und Ebenen muss man 4 Fälle unterscheiden. Alle Formeln haben gemeinsam, dass man mit der Formel den Sinus bzw. Kosinus eines Winkels α berechnet. Den Winkel α muss man allerdings dann noch mit dem Arcus-Kosinus bzw. Arcus-Sinus (Sinus bzw. Kosinus hoch minus 1) berechnen. Die Sache mit dem Arcus erreicht man auf dem Taschenrechner meist mit der SHIFT-Taste bzw. mit der 2nd-Taste jeweils in Verbindung mit Kosinus bzw. Sinus. Für die Formel muss man übrigens wissen, wie man das Skalarprodukt (S.17) von 2 Vektoren und den Betrag (S.21) von Vektoren bestimmt. Falls du nicht mehr genau weißt, wie man diese beiden Sachen berechnet, dann schau in den entsprechenden Kapiteln nach.

1.Fall: Der Winkel zwischen 2 Vektoren u und v

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad \text{mit} \qquad 0° \le \alpha \le 180°$$

Vektor u und Vektor v sind die beiden Vektoren.

2.Fall: Der Winkel (der kleinere) zwischen 2 Geraden

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} * \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \qquad \text{mit} \qquad 0° \le \alpha \le 90°$$

Vektor u und Vektor v sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden.

3.Fall: Der Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{v} * \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} \qquad \text{mit} \qquad 0° \le \alpha \le 90°$$

Vektor v ist der Richtungsvektor der Geraden und Vektor n ist der Normalenvektor der Ebene

4.Fall: Der Winkel zwischen 2 Ebenen

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 * \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \qquad \text{mit} \qquad 0° \le \alpha \le 90°$$

Die Vektoren n sind jeweils die Normalenvektoren der beiden Ebenen.

Auf der nächsten Seite findest du ein Beispiel für die Anwendung der Formeln

Aufgabe: Bestimme den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Es geht also um den Winkel zwischen 2 Vektoren und deshalb nehmen wir uns die Formal aus dem Fall 1 auf der vorigen Seite:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Wir lassen uns nicht dadurch verwirren, dass die Bezeichnungen der Vektoren anders sind. In der Formel sehen wir, dass wir das Skalarprodukt (S.17) und den Betrag (S.21) der beiden Vektoren benötigen. Falls du nicht mehr genau weißt, wie man diese Dinge berechnet, schau in den entsprechenden Kapiteln nach.

Beginnen wir mit dem Skalarprodukt:

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = -4 + 3 = -1$$

Weiter geht's mit den Beträgen der beiden Vektoren:

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$\left|\vec{b}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

Jetzt setzen wir alles in die Formel ein:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{13}} = -0{,}124 \qquad => \qquad \cos\alpha = -0{,}124$$

Beim Eintippen in den Taschenrechner bitte mit dem Bruch vorsichtig sein. Entweder Zähler und Nenner getrennt austippen und dann teilen oder mit Klammern arbeiten.

Wir haben jetzt noch nicht den Winkel sondern nur den Kosinus vom gesuchten Winkel. Den Winkel erhalten wir, indem wir in den Taschenrechner arccos (cos hoch -1) eintippen. Das erreichen wir meist, indem wir 2nd oder SHIFT und dann die Kosinus-Taste drücken:

$$\cos\alpha = -0{,}124 \qquad => \qquad \alpha = 97{,}13°$$

Wenn du die Probe machen möchtest, dann zeichne doch mal die beiden Vektoren (lass beide Vektoren in dem gleichen Punkt beginnen) und miss den Winkel nach!