4.1.1. Schnittpunkt von 2 Geraden

In diesem Kapitel wird ein Verfahren zur allgemeinen Lösung vorgestellt. Konkrete Beispiele mit Zahlen findest du im Kapitel „Gegenseitige Lage von 2 Geraden“ S.81.

Den Ansatz für den Schnittpunkt von 2 Geraden kennen wir schon aus der Analysis, nämlich durch Gleichsetzen der Funktionen. In der Linearen Algebra werden allerdings nicht die Funktionen gleichgesetzt, sondern die Parameterformen der Geraden g und h. Es gilt g = h

Aufgabe: Gegeben sind 2 Geraden, nämlich g und h, in Parameterform und gesucht sind die Koordinaten des Schnittpunktes S, falls einer vorhanden ist.

$$g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} \qquad\qquad h: \vec{x} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{w}$$

Lösung: Durch Gleichsetzen g = h erhalten wir

$$\vec{a} + \lambda \cdot \vec{v} = \vec{b} + \mu \cdot \vec{w}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Wenn wir diese Vektorgleichung zeilenweise in Komponentengleichungen umwandeln, erhalten wir folgendes Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Variablen (λ und μ)

$$\left| \begin{array}{l} a_1 + v_1\lambda = b_1 + w_1\mu \\ a_2 + v_2\lambda = b_2 + w_2\mu \\ a_3 + v_3\lambda = b_3 + w_3\mu \end{array} \right|$$

Dieses Gleichungssystem können wir z.B. mit dem Einsetzungsverfahren oder einem anderen Verfahren lösen. Nummeriere dazu die Gleichungen mit römischen Zahlen von oben nach unten durch. Löse dann z.B. die erste Gleichung nach dem Parameter λ auf und setze die nach λ aufgelöste erste Gleichung in die zweite und anschließend in die dritte Gleichung ein. Dadurch erhalten wir 2 neue Gleichungen, in denen nur der Parameter μ enthalten ist. Löse beide Gleichungen nach μ auf. Erhalten wir in beiden Gleichungen denselben Wert für den Parameter μ, dann ist das Gleichungssystem lösbar und daraus schließen wir, dass die beiden Geraden einen Schnittpunkt haben. Wenn wir die Koordinaten dieses Schnittpunktes bestimmen wollen, dann setzen wir den Parameter μ in die entsprechende Parameterform ein, hier h, und verrechnen die Vektoren miteinander. Als Lösung erhalten wir den Ortsvektor des Schnittpunktes, aus dem wir die Koordinaten des Schnittpunktes entnehmen können.