1.11.2. Komplanarprobe

3 Vektoren sind komplanar, wenn sie in einer Ebene liegen. Im zweidimensionalen Raum R^2 sind 3 Vektoren immer komplanar. Im dreidimensionalen Raum R^3 sind sie dann komplanar, wenn man sich eine Ebene vorstellen kann, in der alle 3 Vektoren drin liegen. Wir wissen jetzt also, was komplanar bedeutet, aber wie zeigt man das mathematisch:

Möglichkeit 1: 3 Vektoren sind komplanar, wenn sie sich als Linearkombination darstellen lassen. Es muss gelten: $\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$ Wie dieser Ansatz umzusetzen ist, kannst du in dem Beispiel auf der nächsten Seite erkennen.

Möglichkeit 2: Sind 3 Vektoren a, b und c komplanar, so muss folgende Gleichung gelten:

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0} \qquad mit \qquad r, s, t \neq 0$$

Auf der rechten Seite steht übrigens der Nullvektor, ein Vektor, dessen Komponenten alle Null sind. Die Anmerkung, dass r, s und t ungleich Null sein sollen ist wichtig, denn wenn r, s und t Null wären, dann wäre die Gleichung immer erfüllt. Was muss man bei der Umsetzung des obigen Ansatzes sonst noch beachten. Zunächst einmal setzt man die Vektoren ein. Anschließend wird die Vektorengleichung durch „zeilenweise aufdröseln“ in 3 Komponentengleichungen umgeformt. Wir erhalten somit ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen (r, s und t). **An dieser Stelle erkennt man auch den Nachteil der Methode 2 gegenüber der Methode 1, bei der man einfachere Gleichungssysteme (3 Gleichungen und nur 2 Variablen) erhält.** Das Gleichungssystem kann man z.B. mittels Einsetzungsverfahren oder einem anderen beliebigem Verfahren lösen. Erhalten wir für r, s und t eine Lösung, wobei wie gesagt r, s und t nicht alle gleichzeitig Null sein dürfen, dann sind die 3 Vektoren komplanar, liegen also in einer Ebene. Ist das Gleichungssystem nicht lösbar, dann sind die 3 Vektoren nicht komplanar.

Möglichkeit 3:

Schreibe die 3 Vektoren direkt nacheinander in Matrixform.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Berechne anschließend von dieser Matrix die Determinante. Falls du nicht mehr weißt wie das funktioniert, schau unter „Determinanten“ noch mal nach.

$$\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad komplanar \qquad \det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad nicht\ komplanar$$

Ist die Determinante gleich 0, dann sind die 3 Vektoren komplanar.
Ist die Determinante ungleich 0, dann sind die 3 Vektoren nicht komplanar.

Anmerkung zur Determinante: Ist die Determinante gleich Null, dann ist das der Matrix zugrunde liegende Gleichungssystem lösbar.

Beispiel zur Komplanarprobe mit der Möglichkeit Nummer 1:

Gegeben sind die 3 Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Überprüfe, ob die 3 Vektoren in einer Ebene liegen, also ob sie komplanar sind.

Die 3 Vektoren sind komplanar, wenn folgende Linearkombination erfüllbar ist, bei der es übrigens egal ist, in welcher Reihenfolge die Vektoren eingesetzt werden, also nicht zu starr an den Buchstaben kleben. Es macht nämlich immer Sinn, einen Vektor, bei dem eine Komponente Null ist, in die rechte Seite einzusetzen, denn dadurch fällt, wie in unserem Beispiel auch, in einer Gleichung eine Variable weg, sodass das Gleichungssystem gleich einfacher ist.

$$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} \quad => \quad \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad => \quad \begin{aligned} 7 &= r + 3s \\ -6 &= 2r - 4s \\ 4 &= 2s \end{aligned}$$

Wir haben also schon gleich die Vektoren eingesetzt und eine Vektorgleichung (mitte) erhalten. Durch aufdröseln erhalten wir das Gleichungssystem ganz rechts (3 Gleichungen und 2 Variablen). Solche Gleichungssysteme löst man am besten mit dem Einsetzungsverfahren. Man darf sich eine beliebige Gleichung aussuchen und diese nach einer beliebigen Variablen auflösen. Da macht man es sich natürlich so einfach wie möglich und das ist in unserem Fall die dritte Gleichung nach s aufzulösen, da in der dritten Gleichung am wenigsten Variablen drin sind. Aus der dritten Gleichung folgt dann: s = 2

Das, also s = 2, müssen wir jetzt in alle anderen Gleichungen einsetzen und wir erhalten:

s in I: $7 = r + 3$ => $7 = r + 3 \cdot 2$ => $r = 1$

s in II: $-6 = 2r - 4s$ => $-6 = 2r - 4 \cdot 2$ => $r = 1$

Wir erhalten 2 mal die Aussage r = 1 und daraus schließen wir, dass das Gleichungssystem lösbar ist und daraus schließen wir, dass die 3 Vektoren komplanar sind, sie liegen also in einer Ebene.

Wäre ein Widerspruch aufgetreten, dann wäre das Gleichungssystem nicht lösbar und dann wären die Vektoren nicht komplanar, sie liegen also nicht in einer Ebene. Der Widerspruch hätte sich auf 2 Arten darstellen können:

1. Direkt in einer Zeile: 0 = 5
2. In 2 Zeilen: r = 1 und r = 2