1.8.3. Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Beim Vektorprodukt werden 2 Vektoren so multipliziert, dass das Ergebnis wieder einen Vektor ergibt. Bei der Schreibweise hat man sich auf ein kleines Kreuz, also ein „x“, geeinigt. Wegen dem Kreuz sagt man zum Vektorprodukt auch Kreuzprodukt.

Das Vektorprodukt wird folgendermaßen berechnet.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad und \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Dieser Ausdruck wird dich wahrscheinlich erschlagen. Du musst dir die Auflösung des Vektorproduktes irgendwie merken. Dazu gibt es folgende Möglichkeiten

1. Wenn du dir die erste Zeile herleiten willst, dann halte bei den Vektoren a und b jeweils die ersten Komponente zu, also die oberste Zeile, und rechne erste Diagonale (von links oben nach rechts unten) minus zweite Diagonale (von links unten nach rechts oben). Das kennst du vielleicht noch von der Determinantenrechnung.

Wenn du die zweite Zeile herleiten willst, dann halte bei den Vektoren a und b jeweils die zweite Komponente zu, also die mittlere Zeile, und rechne diesmal zweite Diagonale (von links unten nach rechts oben) minus erste Diagonale (von links oben nach rechts unten).

Wenn du die dritte Zeile herleiten willst, dann halte bei den Vektoren a und b jeweils die dritte Komponente zu, also die unterste Zeile, und rechne erste Diagonale (von links oben nach rechts unten) minus zweite Diagonale (von links unten nach rechts oben).

2. Alternativ kannst du dir auch folgendes merken. Das Minuszeichen trennt 2 Multiplikationen. Die Spalten für die Multiplikationen ergeben sich aus den Zahlenkombinationen 231 und 312, wobei diese Zahlenkombinationen auf die Vektoren a und b anzuwenden sind. Die erste Spalte ergibt sich, wenn du die erste Zahlenkombination auf den Vektor a anwendest. Die zweite Spalte ergibt sich, wenn du die zweite Zahlenkombination auf den Vektor b anwenden. Die ersten beiden Spalten werden multipliziert und dann kommt jeweils das Minuszeichen. Die dritte Spalte ergibt sich durch Anwendung der zweiten Zahlenkombination auf Vektor a. Die vierte Spalte ergibt sich durch Anwendung der ersten Zahlenkombination auf Vektor b. Die dritte und vierte Spalte kann man auch vertauschen.

Die beiden Möglichkeiten zum Merken des Vektorproduktes sind nur Vorschläge. Wenn du eine andere Möglichkeit für dich gefunden hast, wende diese ruhig an.

Falls dir das auf der vorigen Seite vorgestellte Verfahren zur Bestimmung des Vektorproduktes zu kompliziert erscheint, möchte ich dir auf dieser Seite ein anderes Verfahren zur Bestimmung des Vektorproduktes zeigen, welches ich persönlich am liebsten benutze. Ein **Beispiel** mit richtigen Zahlen findest du im Kapitel „Normalenvektor“ (S.31).

Alternativverfahren:

Gegeben sind auch wieder die beiden Vektoren a und b

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad und \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Berechnet werden soll der Vektor c, der das Ergebnis des Vektorproduktes der Vektoren a und b ist.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

Die beiden Vektoren a und b schreibt man waagrecht untereinander, wobei die ersten beiden Komponenten wiederholt werden:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{matrix}$$

Die erste Spalte ignorieren wir und teilen dann den verbleibenden Ausdruck in 3 gleich große Stücke, wobei ein Stück aus 4 Buchstaben besteht. Die so entstehenden quadratischen Determinanten werden folgendermaßen aufgelöst:

Erste Diagonale (von links oben nach rechts unten) minus zweite Diagonale (von links unten nach rechts oben)

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_2 \cdot b_3 - b_2 \cdot a_3$$

$$c_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = a_3 \cdot b_1 - b_3 \cdot a_1$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot a_2$$

Der gesuchte Vektor c ergibt sich dann aus den einzelnen Komponenten c

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Vektorproduktes

1. Zuerst möchte ich dich darauf hinweisen, dass die Berechnung des Vektorproduktes im Gegensatz zur s-Multiplikation und dem Skalarprodukt **nicht kommutativ** ist. Das bedeutet folgendes:

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$$

Wenn man also die Vektoren vertauscht, dann kommt nicht das Gleiche heraus. Bei der s-Multiplikation und beim Skalarprodukt wäre diese Vertauschung möglich.

2. Ergibt das Vektorprodukt von 2 Vektoren Null, so sind die Vektoren **parallel** zueinander

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

In der Praxis benutzt man zum Beweis der Parallelität allerdings nicht das Vektorprodukt, sondern folgenden Ansatz, den du auch im Kapitel „Parallelität“ (S.25) wieder findest:

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

3. Das Ergebnis eines Vektorproduktes ist ja wieder ein Vektor und dieser Vektor ist **senkrecht** zu den beiden Vektoren, aus denen das Vektorprodukt berechnet wurde

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} \perp \vec{c} \quad und \quad \vec{b} \perp \vec{c}$$

Das ist wohl die wichtigste Eigenschaft des Vektorproduktes, denn so berechnet man bei Ebenen aus den Richtungsvektoren den Normalenvektor (S.30), der ja senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren steht.