1.10. Einheitsvektoren

Einheitsvektoren sind Vektoren, deren Betrag bzw. Länge eine Einheit, also 1, beträgt. Mit einer Einheit ist die Länge einer Einteilung auf den Achsen des Koordinatensystems gemeint. Falls du nicht mehr weißt, wie man den Betrag (S.21) und damit auch die Länge von Vektoren berechnet, dann schau notfalls im gleichnamigen Kapitel nach.

Im Zusammenhang von Einheitsvektoren taucht das Stichwort **Basiseinheitsvektoren** auf. Auch die Basiseinheitsvektoren sind Einheitsvektoren, haben also die Länge von einer Einheit. Sie sind allerdings in sofern besonders, da sie in Richtung der Koordinatenachsen zeigen. Im kartesischen Koordinatensystem (dreidimensional) gibt es folgende 3 Basiseinheitsvektoren:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der erste Vektor zeigt in Richtung der x-Achse, der zweite in Richtung der y-Achse und der dritte in Richtung der z-Achse. Alle drei haben gemeinsam, dass ihr Betrag und somit die Länge des Vektors eine Einheit beträgt.

Man kann übrigens jeden beliebigen Vektor in einen Einheitsvektor umwandeln, indem man ihn durch seinen eigenen Betrag teilt, was man rechnerisch durch Multiplikation mit einem Bruch umsetzt. Um kenntlich zu machen, dass es sich um einen Einheitsvektor handelt, hängt man an den Vektor übrigens eine Null als Index dran:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Der so berechnete Einheitsvektor hat zwar noch die gleiche Richtung wie der Vektor a, ist jetzt allerdings genau eine Einheit lang.

Wandle den gegebenen Vektor in seinen Einheitsvektor um: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Berechnen wir zunächst den Betrag von $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 9 + 16} = \sqrt{29}$

Für den Einheitsvektor ergibt sich:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{29}} \\ \frac{3}{\sqrt{29}} \\ \frac{4}{\sqrt{29}} \end{pmatrix}$$

Berechne zur Probe den Betrag von $\vec{a}_0$ (gleich 1)

Man kann übrigens jeden Vektor als Linearkombination der Basiseinheitsvektoren schreiben, indem man folgenden Ansatz umsetzt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3$$

Dazu ein Beispiel:

Der Vektor a soll als Linearkombination der Basiseinheitsvektoren geschrieben werden

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Multipliziere die rechte Seite aus und du wirst sehen, dass der Vektor a wieder rauskommt.

In vorigen Kasten haben wir auch gleich gelernt, was eine **Linearkombination** ist, nämlich eine Vektoraddition von mehreren Vektoren, die vorher mit einer Zahl multipliziert wurden, um die Vektoren länger oder kürzer zu machen.

Dazu noch ein anderes Beispiel:

Will man den Vektor a als Linearkombination der Vektoren b und c schreiben, so erhält man:

$$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$$

Für r und s würde man Zahlen so einsetzen, dass diese Zahlen die Vektoren b und c so verlängern bzw. verkürzen, dass der Vektor a entsteht bzw. dargestellt wird.