8.6. Flächenberechnungen

8.6.1. Problematik des bestimmten Integrals bei Flächenberechnungen

Wie bereits auf der vorigen Seite erklärt, kann man mit dem bestimmten Integral die Fläche zwischen einer Funktion f(x) und der x-Achse in einem bestimmten Intervall von a bis b [a ; b] berechnen. Dabei existiert ein Problem, denn man darf niemals über Nullstellen hinweg integrieren, d.h. man muss zuallererst prüfen, ob zwischen den Intervallsgrenzen a und b eine oder sogar mehrere Nullstellen sind.

Eine entsprechende Übungsaufgabe dazu findest du auf der übernächsten Seite in dem Abschnitt „Fläche zwischen Funktion und x-Achse“. An dieser Stelle sei nur allgemein und grob gezeigt, wo das Problem dabei ist.

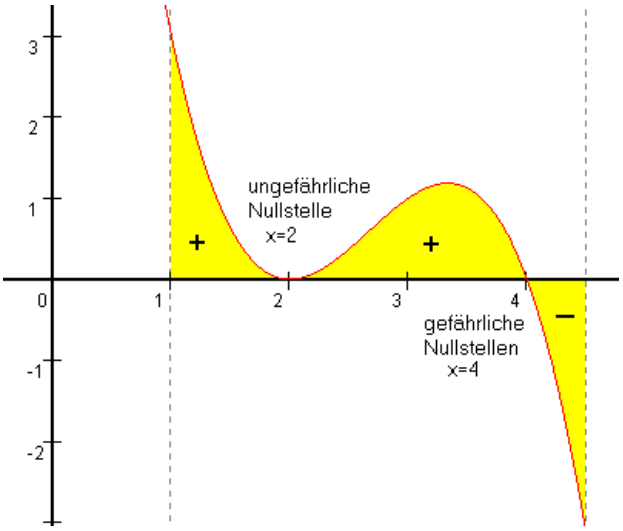
Das Problem existiert deswegen, weil das Integral zwischen positiven und negativen Flächen unterscheidet. Solange die linke Intervallsgrenze a kleiner als die rechte Intervallsgrenze b ist, es gilt also a < b, sind für das Integral Flächen oberhalb der x-Achse positive Flächen, während Flächen unterhalb der x-Achse für das Integral negativ sind. Integriert man über Nullstellen hinweg, so verrechnet dass Integral die positiven und negativen Flächen und es entsteht der so genannte orientierte Flächeninhalt.

Noch mal auf den Punkt gebracht:

Sind zwischen dem Intervall keine Nullstellen, so ist der Wert des Integrals der Flächeninhalt zwischen der Funktion f(x) und der x-Achse in einem Intervall [a;b]

Sind allerdings zwischen den Intervallsgrenzen eine oder gar mehrere Nullstellen, so ist der Wert des Integrals nicht der tatsächliche Flächeninhalt, sondern der orientierte Flächeninhalt, bei dem positive und negative Flächen miteinander verrechnet sind.

Im letzteren Fall muss man den Flächeninhalt über 2 oder mehr Integrale bestimmen. In der Skizze ist das Intervall [1 ; 4,5]. Das müsste man in 2 Integral aufspalten. Einmal [1;4] und dann noch mal [4 ; 4,5]. Erklärung siehe bitte links von der Skizze.

Noch eine Anmerkung zu den Nullstellen:

Es gibt gefährliche und ungefährliche Nullstellen. Nullstellen, die nur **Berührstellen** sind, sind ungefährlich, denn durch Berührstellen entstehen keine Flächen mit unterschiedlichen Vorzeichen. *Über Berührstellen darf man hinweg integrieren*. **Schnittstellen** sind allerdings gefährliche Nullstellen, über die man nicht hinweg integrieren darf. Ungefährliche Nullstellen, also Berührstellen, erkennt man übrigens daran, dass sie in gerader Zahl (doppelt, vierfach...) Lösung sind. Rechts eine Skizze mit gefährlichen und ungefährlichen Nullstellen.