8.6.4. Fläche zwischen 2 Funktionen

Will man die Fläche zwischen 2 Funktionen bestimmen, genügt folgender Ansatz

$$A = \left| \int_{S1}^{S2} \left[f(x) - g(x) \right] dx \right| \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{l} A = Fläche \\ S1 = 1.Schnittstelle \\ S2 = 2.Schnittstelle \\ f(x)\ und\ g(x) \ = \ 2 \text{ Funktionen} \end{array}$$

Ganz wichtig: <u>Niemals über Schnittstellen hinweg integrieren.</u> Damit ist insbesondere gemeint, dass für den Fall, dass mehr als 2 Schnittstellen vorhanden sind, ein Ansatz nicht genügt. Hier muss die Fläche auch wieder aufgeteilt und über mehrere Ansätze berechnet werden. Das Verfahren ist dir vielleicht noch aus dem vorigen Kapitel bekannt, wo man bei der Berechnung der Fläche zwischen einer Funktion und der x-Achse nicht über Nullstellen hinweg integrieren durfte. Bei der Fläche zwischen 2 Funktionen darf man eben nicht über Schnittstellen hinweg integrieren.

Der obige Ausdruck sieht mal wieder recht wild aus. Was muss man eigentlich machen.

1. Zunächst einmal muss man S1 und S2 bestimmen. Das sind ja die Schnittstellen (also die x-Werte der Schnittpunkte) der Funktionen. Diese berechnet man durch Gleichsetzen der beiden Funktionen, also f(x) = g(x). Hat man die Funktionen gleichgesetzt, bringt man alles auf die linke Seite, um zu erkennen, welches Werkzeug angewendet werden muss (pq-Formel, Ausklammern ...).

2. Die beiden Funktionen f(x) und g(x) sind ja gegeben und werden zusammen mit den unter Punkt 1 berechneten Schnittstellen in die Formel eingesetzt.

3. Wo beginnt man denn jetzt in der Formel zuerst mit dem Rechnen? Zuerst bildet man die Differenz der beiden Funktionen. Anschließend wird integriert und „Obergrenze minus Untergrenze“ berechnet. Am Schluss wird noch der Betrag gebildet, wodurch sichergestellt ist, dass nur positive Flächen herauskommen.

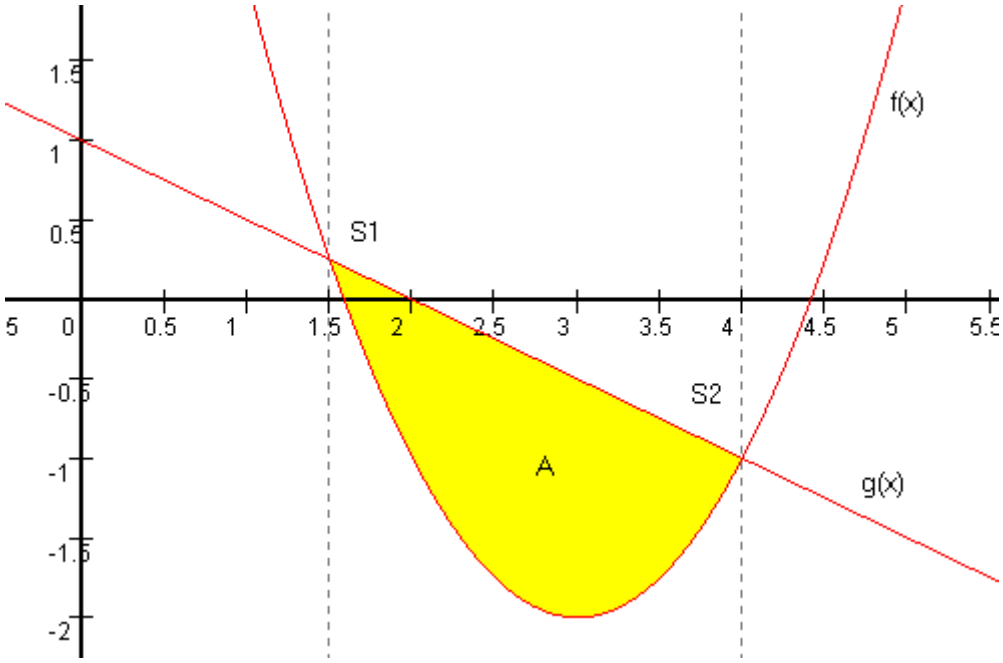
Dazu ein Rechenbeispiel:

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 - 6x + 7$ und $g(x) = -0{,}5x + 1$
Bestimme die Fläche zwischen den beiden Funktionen.

Zuerst müssen die Schnittstellen durch Gleichsetzen der beiden Funktionen berechnet werden

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 - 6x + 7 &= -0{,}5x + 1 \quad \Big| + 0{,}5x\ und\ -1 \\ x^2 - 5{,}5x + 6 &= 0 \quad \Big| pq - Formel \end{aligned}$$

Durch Anwendung der pq-Formel (Die Rechnung solltest du wirklich können oder dir die pq-Formel im Kapitel <u>Werkzeugkasten</u> S.42 nochmals ansehen) erhält man dann als Lösung die beiden Schnittstellen S1 = 1,5 und S2 = 4 (Siehe auch die Skizze auf der nächsten Seite).



Die Schnittstellen und die Funktionen werden in den Ansatz für die Berechnung der Fläche zwischen den 2 Funktionen eingesetzt und die Formel wird ausgerechnet. Beim Einsetzen von g(x) ist es sinnvoll, eine Klammer um den Funktionsterm zu setzen, da es ansonsten wegen dem Minus Vorzeichenfehler entstehen könnten. Die beiden Funktionen werden voneinander abgezogen und anschließend wird integriert. Da es sich hier um ein bestimmtes Integral handelt, muss man noch Obergrenze minus Untergrenze anwenden. Auch hier sollte man nach dem Minus eine Klammer aufmachen. Nachdem man die teilweise unangenehmen Zahlen verrechnet hat, muss man am Schluss nur noch den Betrag bilden.

$$A = \left| \int_{S1}^{S2} \left[f(x) - g(x) \right] dx \right|$$

$$A = \left| \int_{1,5}^{4} x^2 - 6x + 7 - (-0{,}5x + 1)\, dx \right|$$

$$A = \left| \int_{1,5}^{4} x^2 - 6x + 7 + 0{,}5x - 1\, dx \right|$$

$$A = \left| \int_{1,5}^{4} x^2 - 5{,}5x + 6\, dx \right|$$

$$A = \left| \left[\tfrac{1}{3}x^3 - 5{,}5 \cdot \tfrac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{1,5}^{4} \right|$$

$$A = \left| \tfrac{1}{3} \cdot 4^3 - 2{,}75 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 - \left(\tfrac{1}{3} \cdot 1{,}5^3 - 2{,}75 \cdot 1{,}5^2 + 6 \cdot 1{,}5 \right) \right|$$

$$A = \left| \tfrac{64}{3} - 44 + 24 - (1{,}125 - 6{,}1875 + 9) \right|$$

$$A = |-2{,}6| = 2{,}6\ \textit{Flächeneinheiten}\ (FE)$$

Die Fläche zwischen den beiden Funktionen beträgt also 2,6 Flächeneinheiten.

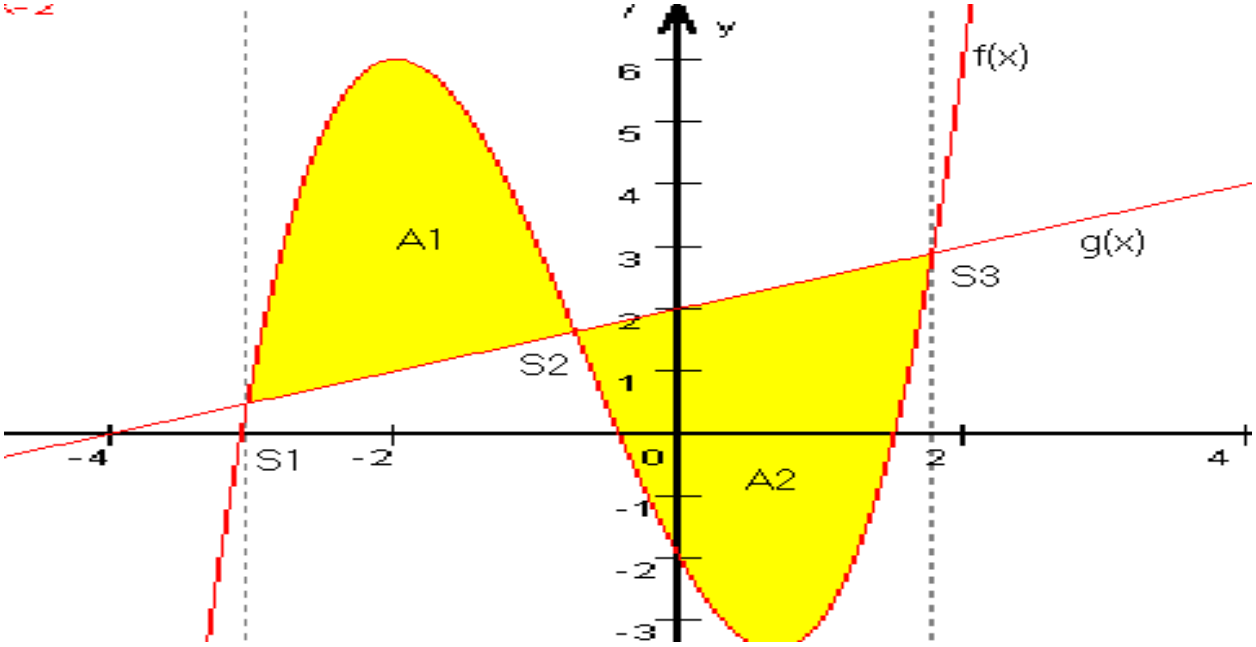
Wie bereits am Anfang des Kapitels erwähnt, können auch mehr als 2 Schnittstellen vorhanden sein. **Dies ist im nächsten Beispiel der Fall.**

Wie groß ist die Fläche zwischen den beiden Funktionen $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 2$ und $g(x) = 0{,}5x + 2$.

Lösungshinweise:

Berechne dazu zuerst die Schnittstellen, wobei du auf die erste Stelle nach dem Komma runden solltest. Zur Kontrolle erhältst du schon jetzt die Lösungen für die Schnittstellen (S1: x = -3 S2: x = -0,7 S3: x = 1,8).

Da es insgesamt 3 Schnittstellen sind, musst du 2 Ansätze für die 2 Teilflächen A1 und A2 aufstellen. Insgesamt ergibt sich als Fläche zwischen f(x) und g(x) A = 17.



Aufgaben zu diesem Thema können übrigens auch folgendermaßen lauten:

Bestimme die Fläche zwischen den beiden Funktionen $f(x) = x^2 - 5$ und $g(x) = -x^2 + 3$
a) zwischen den beiden Funktionen,
b) zwischen den beiden Funktionen im Intervall von [-3;2].

Lösungshinweise: Zunächst solltest du die beiden Funktionen zeichnen. Das ist gar nicht so schwer, denn beides sind Normalparabeln, die nach unten bzw. oben verschoben worden sind. Die eine ist oben offen, die andere unten. An der Skizze kannst du dann sehen, welche Fläche im jeweiligen Fall gesucht ist.
Im Fall a muss man die Schnittstellen bestimmen und dann wie gewohnt die Fläche zwischen den 2 Funktionen bestimmen. Wir erhalten dann den Wert A = 21,33.
Im Fall b muss man 2 Ansätze aufstellen, da man über Schnittstellen nicht hinweg integrieren darf. Es ergibt sich dann als Lösung A = 26 (gerundet).