8.3.4. Integration durch Substitution

Die Substitution beim Integrieren ist vergleichbar mit der Kettenregel beim Differenzieren. Die Vorgehensweise ist schwierig allgemein zu erklären, deshalb werden wir das gleich an einem konkreten Beispiel durchrechnen:

Gesucht ist die Stammfunktion F(x) von $f(x) = (x^2 + 3)^4 \cdot 5x$

Warum kommt man hier überhaupt auf die Idee mittels Substitution zu integrieren. Die Ableitung des Inneren muss vom Grad her das ergeben, was außerhalb noch steht.
In unserem Beispiel ist das Innere x^2+3 und davon die Ableitung ist irgendwas mit x hoch eins und x hoch eins taucht außerhalb der Klammer noch mal auf, nämlich 5x.

Zunächst müssen wir überlegen, was denn substituiert werden soll. Wer sich noch von der Kettenregel her an das Innere und Äußere erinnern kann, dem hilft die Information, dass man das Innere substituieren, also ersetzen, muss. Man kommt dann also auf $z = x^2 + 3$.

Von diesem z muss man dann die Ableitung z Strich bilden, wobei die Ableitung von z der Quotient aus Delta z und Delta x ist. Den entstehenden Ausdruck muss man nach $x \cdot dx$ auflösen (siehe links)

$$z = x^2 + 3 \qquad z' = \frac{dz}{dx} = 2x \quad \Big| \cdot dx$$

$$z' = \frac{dz}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dz = 2x \cdot dx \quad \Big| : 2 \text{ und Seiten vertauschen}$$

$$x \cdot dx = \frac{dz}{2}$$

Im nächsten Schritt muss man z und $x \cdot dx$ in das folgende Integral einsetzen, denn gesucht ist ja immer noch die Stammfunktion, also das Integral von f(x) dx

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int \left(x^2 + 3\right)^4 \cdot 5x\, dx \quad \Big| \; z \text{ und } x \cdot dx \text{ einsetzen}$$

$$F(x) = \int z^4 \cdot 5 \cdot \frac{dz}{2} = \int \tfrac{5}{2} \cdot z^4 dz = \tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{1}{5} z^5 = 0{,}5 z^5$$

In der letzten Zeile steckt noch eine Menge an Umformungen drin. Nach dem Einsetzen von z und $x \cdot dx$ muss die 2 aus dem Nenner heraus. Dann wird ganz normal integriert, wobei hier eben nach z integriert wird. Am Schluss noch die zwei Brüche ausmultiplizieren und in eine Dezimalzahl umwandeln. Indem man z wieder zurücksubstituiert erhält man dann

$$F(x) = 0{,}5 \cdot \left(x^2 + 3\right)^5$$

Wäre es ein bestimmtes Integral, so müsste man noch Obergrenze minus Untergrenzeanwenden. Geht es übrigens nur um die Berechnung des bestimmten Integrals, dann braucht man nicht unbedingt wieder zurück substituieren, sondern man könnte alternativ das z in der Stammfunktion lassen, müsste dann allerdings die Grenzen des Intervalls in z-Werte umwandeln, in unserem Falle mit dem Ansatz $z(x) = x^2 + 4$ (einfach x einsetzen).