8.3.2. Besondere Funktionen und deren Integral

Funktionen, bei denen x im Nenner auftaucht:
Vor dem Integrieren wird die Funktion umgeformt. Wer diese Umformung nicht nachvollziehen kann, der sollte unbedingt noch mal im Kapitel Potenzregeln unter negativem Exponenten nachlesen. Nach der Umformung kann man dann mit der allerersten Regel auf der vorigen Seite integrieren. Dabei ist zu beachten, dass, wenn man einen negativen Exponenten um 1 erhöht, man sich Richtung Null auf dem Zahlenstrahl bewegt.

$$f(x) = \frac{4}{x^2} = 4 \cdot x^{-2} \qquad => \qquad F(x) = 4 \cdot \tfrac{1}{-1} \cdot x^{-1} = -4 \cdot \tfrac{1}{x} = -\tfrac{4}{x}$$

Versuche doch mal die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ mit der gerade gelernten Methode zu integrieren. Falls du dabei auf ein Problem stößt, dann solltest du einfach akzeptieren, dass folgendes gilt:

$$f(x) = \tfrac{1}{x} \qquad => \qquad F(x) = \ln x$$

Funktionen, bei denen x unter der Wurzel auftaucht

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad => \qquad F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

Auch hier musste man vor dem Integrieren umformen. Wem diese Umformung des Wurzelausdruckes in Exponentenschreibweise unklar ist, der muss wieder im Kapitel Potenzregeln nachlesen. Auf jeden Fall kann man nach der Umformung wieder die normale Integralregel anwenden. Dabei wird ja der Exponent um 1 erhöht und man erhält 3/2 Dieser erhöhte Exponent taucht gemäß Regel im Nenner des Bruches davor auf. Der Doppelbruch wird aufgelöst und x taucht unter der Wurzel auf, indem der Bruch im Exponenten wirkt. (siehe auch Potenzregeln S.37)

Trigonometrische Funktionen: $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$ und $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$

Falls du dir das schlecht merken kannst, dann hilft dir vielleicht die Überlegung: **Was muss man denn ableiten, damit f(x) wieder rauskommt.** Dazu musst du natürlich Sinus und Kosinus ableiten können.

Exponentialfunktion: $f(x) = e^x \quad => \quad F(x) = e^x$

Besonderheit bei Brüchen (Logarithmisches Integrieren):
Ist im Zähler eines Bruches die Ableitung des Nenners, so gilt:

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln|g(x)| \qquad Bsp.: \quad f(x) = \frac{3x^2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \ln x^3 = 3 \cdot \ln x$$

Falls man mit dieser Regel bei Brüchen nicht weiterkommt, hilft evtl. Polynomdivision. Nach Durchführung der Polynomdivision kann man evtl. normal integrieren.

Auf den folgenden Seiten wirst du Regeln kennen lernen, mit denen du Funktionen integrieren kannst, bei denen die bisher bekannten Regeln versagen.