8.4. Eigenschaften des Integrals

1. Konstanten (k), die multipliziert werden, kann man vor das Integral ziehen

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx \qquad \Rightarrow \qquad \int 3 \cdot \sin(x)\, dx = 3 \cdot \int \sin(x)\, dx$$

Diese Eigenschaft haben wir schon kennen gelernt, nämlich bei der Anwendung von Partiellem Integrieren S.237.

2. Summenregel: Das Integral einer Summe ist die Summe der Integrale

$$\int f(x) + g(x)\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \int 3x + \cos(x)\, dx = \int 3x\, dx + \int \cos(x)\, dx$$

Darauf beruht ja auch eine grundlegende Integralregel, nämlich dass man alles, was durch Plus oder Minus getrennt ist, auch getrennt integrieren kann.

3. Vertauschen der Integralsgrenzen beim bestimmten Integral bewirkt Vorzeichenänderung

$$+\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

Wenn man also die Grenzen vertauscht, dann ändert sich das Vorzeichen beim Ergebnis:

$$\int_1^3 3x^2\, dx = [x^3]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 9 - 1 = 8 \qquad \textit{aber} \qquad \int_3^1 3x^2\, dx = [x^3]_3^1 = 1^3 - 3^3 = 1 - 9 = -8$$

Diese Eigenschaft hat nur insofern eine Bedeutung, dass man immer darauf achten sollte, dass die Untergrenze kleiner ist als die Obergrenze, es sei denn, die Aufgabe ist ausdrücklich anders gestellt. Beachtet man, dass a < b ist, dann kann man das Ergebnis dahingehend interpretieren, dass ein positives Ergebnis eine Fläche oberhalb der x-Achse darstellt, während ein negatives Ergebnis eine Fläche unterhalb der x-Achse darstellt. Dies aber, wie gesagt, nur bei Beachtung von a < b und auch nur bei Berechnung von Flächen zwischen einer Funktion f(x) und der x-Achse.

4. Die folgende Eigenschaft des Integrals kannst du mal selbst durchrechnen, indem du jeweils die rechte Seite der beiden unteren Gleichungen bestimmst. Die linke Seite haben wir unter Punkt 3 schon bestimmt.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

$$\int_1^3 3x^2\, dx = \int_1^2 3x^2\, dx + \int_2^3 3x^2\, dx \qquad \textit{und} \qquad \int_1^3 3x^2\, dx = \int_1^5 3x^2\, dx + \int_5^3 3x^2)\, dx =$$

Wie du siehst, kann der Wert c sowohl innerhalb als auch außerhalb des ursprünglichen Intervalls [1;3] annehmen. In obigen Beispielen ist c nämlich einmal 2 (links) und einmal 5 (rechts).