8. INTEGRALRECHNUNG

8.1. Beweis über Obersumme und Untersumme

Das Kapitel der Integralrechnung beginne ich mit dem Beweis. So haben wir es übrigens auch im Kapitel Differentialrechnung gemacht. Zuerst den Beweis über den Differentialquotienten, aus dem wir die Hauptregel der Differentialregeln ableiten konnten. Den Differentialquotienten braucht man später eigentlich nicht mehr. Bei der Integralrechnung wird das jetzt ähnlich ablaufen. Zuerst wird die Integralrechnung über Obersumme bzw. Untersumme bewiesen, aber beides wird man später nicht mehr benötigen. Auch hier wird man nur noch mit Regeln arbeiten, die sich aus dem Beweis mittels Obersumme bzw. Untersumme ergeben. Okay, dann steigen wir doch gleich mal ein, indem wir erst mal sehen, was überhaupt mit Ober- und Untersumme gemeint ist.

Bei der Integralrechnung geht es hauptsächlich um Flächenberechnungen, und zwar um eine Fläche zwischen einer Funktion f(x) und der x-Achse in einem bestimmten Intervall [a;b]. Die Intervallsgrenzen bezeichnet man mit a und b, wobei a der linke und b der rechte Rand des Intervalls ist. Das Intervall bestimmt übrigens einen Abschnitt auf der x-Achse.

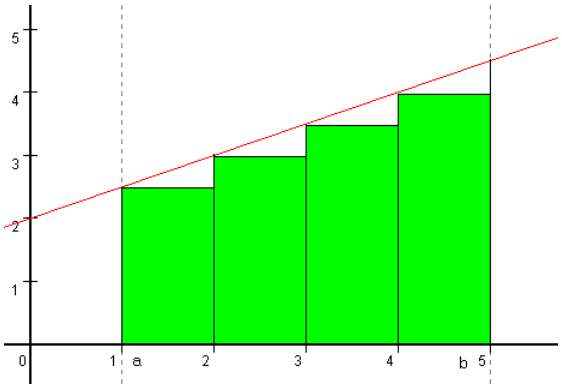
Um zu erkennen, was jetzt mit Unter- bzw. Obersumme gemeint ist, müssen wir in ein Koordinatensystem eine Funktion einzeichnen, sagen wir f(x) = 0,5x + 2. Dann suchen wir uns ein Intervall aus, sagen wir von 1 bis 5, also [1;5]. Zwischen der Funktion und der x-Achse und innerhalb des Intervalls wird dadurch eine Fläche A bestimmt, und diese Fläche A will man bestimmen. Das ist das eigentliche Ziel der Integralrechnung. Indem wir nun die Fläche A in Balken aufteilen, wollen wir uns in der linken Spalte mittels Untersumme und in der rechten Spalte mittels Obersumme der tatsächlichen Fläche annähern. Die Anzahl der Balken (n) setzen wir mal auf n = 4 fest. Bevor wir nun zu den beiden Skizzen kommen, bestimmen wir noch schnell die Balkenbreite (B) mit folgender Formel:

$$B = \frac{b-a}{n} = \frac{5-1}{4} = 1$$

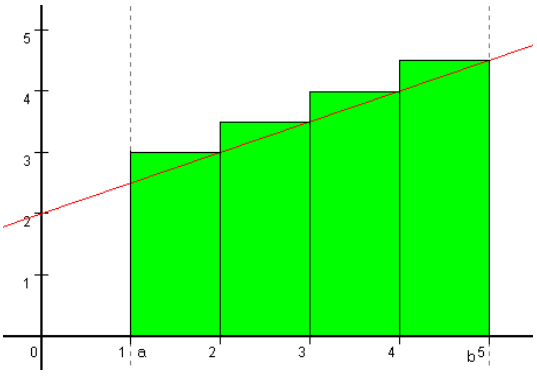
B = Balkenbreite $\quad$ a = Linker Rand des Intervalls

n = Anzahl der Balken $\quad$ b = Rechter Rand des Intervalls

Bei der **Untersumme** muss man bei den jeweiligen Balken den linken Rand betrachten und an der Stelle, wo dieser die Funktion berührt, einen waagrechten Strich nach rechts ziehen, bis man zum nächsten Balken gelangt.

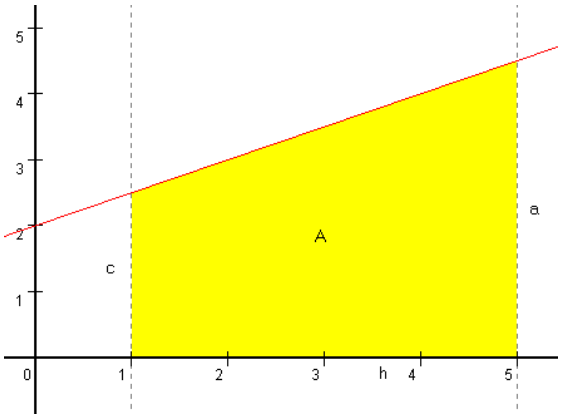


Bei der **Obersumme** muss man bei den jeweiligen Balken den rechten Rand betrachten und an der Stelle, wo dieser die Funktion berührt, einen waagrechten Strich nach links ziehen, und zwar von der Länge her eine Balkenbreite.



© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

Im Folgenden wollen wir mal zu obigem Beispiel die Unter- und Obersumme berechnen, wobei, wir vorher noch die genaue Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse in dem Intervall von 1 bis 5 bestimmen. Dazu benötigen wir die Flächenformel für das Trapez, denn die Fläche ist ein auf der Seite liegendes Trapez. Siehe Skizze links. Die Länge von a erhalten wir übrigens, indem wir den Wert 5 in die Funktion f(x) = 0,5x + 2 einsetzen, wir berechnen also f(5). Die Länge von c erhalten wir durch f(1). Die Höhe ist die Differenz der Intervallsgrenzen, also h = b – a = 5 – 1 = 4. Die Daten werden in die Formel eingesetzt:



$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{4{,}5+2{,}5}{2} \cdot 4 = \frac{7}{2} \cdot 4 = 3{,}5 \cdot 4 = 14$$

Wir wissen jetzt also, dass die gesuchte Fläche 14 Flächeneinheiten groß ist. Im Folgenden werden wir die Fläche der Untersumme berechnen, und anschließend die Fläche der Obersumme.

Zur Übung solltest du mal alleine versuchen, die Balken für die Untersumme und die Obersumme zu zeichnen. Vergleiche bitte anschließend dein Ergebnis mit den Skizzen auf der vorigen Seite.

Beginnen wir mit der Untersumme. Wir sehen in der Skizze auf der vorigen Seite unten links unter der Funktion 4 grüne Balken, deren gesamte Fläche gesucht ist. Jeder Balken ist geometrisch ein Rechteck und die Fläche von Rechtecken bestimmt man mit Seite mal Seite. Speziell auf die Aufgabe bezogen bedeutet Seite mal Seite die Balkenbreite mal Balkenhöhe. Für die Balkenbreite haben wir auf der vorigen Seite schon eine Formel festgehalten und wir erhielten den Wert 1. Die Balkenhöhe bei der Untersumme erhalten wir, indem wir den x-Wert des linken Balkenrandes in die Funktion einsetzen. Die Höhe des ersten Balkens erhalten wir z.B. mit f(1) und die Höhe des zweiten Balkens mit f(2), denn der x-Wert des linken Randes vom zweiten Balken ist 2. Für die gesamte Untersumme bei n = 4 Balken, deshalb auch der Index 4 bei dem U, erhalten wir dann (B steht übrigens für die Balkenbreite):

$$U_4 = B \cdot f(1) + B \cdot f(2) + B \cdot f(3) + B \cdot f(4)$$
$$U_4 = B \cdot \left[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)\right]$$
$$U_4 = 1 \cdot \left[(0{,}5 \cdot 1 + 2) + (0{,}5 \cdot 2 + 2) + (0{,}5 \cdot 3 + 2) + (0{,}5 \cdot 4 + 2)\right]$$
$$U_4 = 1 \cdot \left[2{,}5 + 3 + 3{,}5 + 4\right] = 1 \cdot 13 = 13$$

© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

In der zweiten Zeile wurde die Balkenbreite B ausgeklammert. In der dritten Zeile wurde einfach nur eingesetzt und anschließend ausgerechnet.
Okay, den Wert für die Untersumme merken wir uns, und berechnen nun die Obersumme. Das funktioniert genau so wie die Untersumme, allerdings nimmt man jetzt von jedem Balken nicht den linken Rand, sondern den rechten. Dem Ansatz liegt wieder Balkenbreite mal Balkenhöhe zugrunde, wobei wir letztere durch Einsetzen der rechten Balkenränder in die Funktion erhalten. Wir erhalten dann

$$O_4 = B \cdot f(2) + B \cdot f(3) + B \cdot f(4) + B \cdot f(5)$$
$$O_4 = B \cdot \left[f(2) + f(3) + f(4) + f(5) \right]$$
$$O_4 = 1 \cdot \left[(0{,}5 \cdot 2 + 2) + (0{,}5 \cdot 3 + 2)(0{,}5 \cdot 4 + 2) + (0{,}5 \cdot 5 + 2) \right]$$
$$O_4 = 1 \cdot \left[3 + 3{,}5 + 4 + 4{,}5 \right] = 1 \cdot 15 = 15$$

In der zweiten Zeile wurde wieder B ausgeklammert, anschließend eingesetzt und ausgerechnet. Die Obersumme beträgt also 15 Flächeneinheiten. Auf der vorigen Seite haben wir für die Untersumme den Wert 13 und für die tatsächliche Fläche A den Wert 14 erhalten. Wenn wir jetzt alle Werte vergleichen, sehen wir, dass die Untersumme etwas kleiner und die Obersumme etwas größer als die tatsächliche Fläche ist. Das sehen wir auch in den entsprechenden Skizzen, denn bei der Untersumme fehlen die weißen Dreiecke, während bei der Obersumme die grünen Dreiecke zu viel sind. Wir können also bisher festhalten:

$$\textit{Untersumme}\ (U) \quad < \quad \textit{tatsächliche Fläche}\ (A) \quad < \quad \textit{Obersumme}\ (O)$$

So, jetzt bist du wieder gefordert: Berechne doch mal für f(x) = 0,5x + 2 erneut die Unter- und Obersumme, wobei wir diesmal die Anzahl der Balken von n = 4 auf n = 8 erhöhen. Das Intervall bleibt bei [1;5]

Lösungshinweise:
Fertige zunächst eine Skizze an. Jeweils eine für die Untersumme und eine für die Obersumme. Beachte, dass sich durch die Erhöhung der Balkenanzahl die Balkenbreite ändert. Benutze zur Bestimmung der neuen Balkenbreite die entsprechende Formel.
Wenn du richtig gerechnet hast erhältst du:

$$U_8 = 13{,}5 \qquad \textit{und} \qquad O_8 = 14{,}5$$

Was soll uns nun dieses Ergebnis sagen. Ordnen wir es doch mal in folgendes Schema ein

$$U_4 \quad < \quad U_8 \quad < \quad A \quad < \quad O_8 \quad < \quad O_4$$

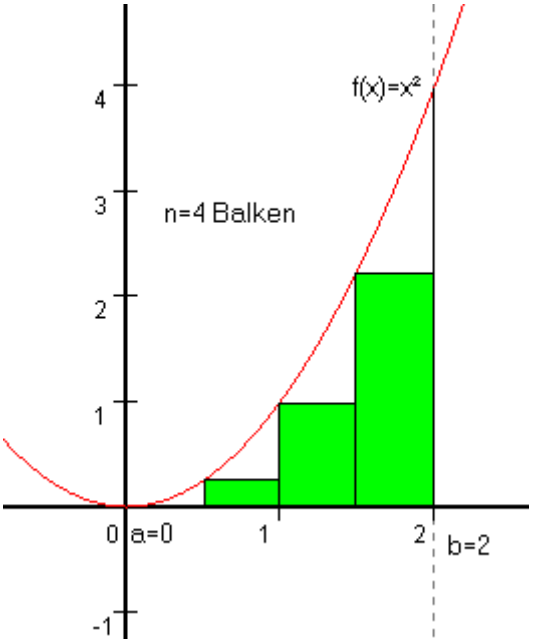
Kannst du jetzt was erkennen? Die Untersummen sind wie bisher auch immer kleiner als die tatsächliche Fläche und die Obersummen sind eben immer größer. Aber was passiert mit dem Wert der Unter- bzw. Obersumme, wenn man die Anzahl der Balken erhöht. Die Untersumme wird größer und die Obersumme wird kleiner, d.h. beide Werte nähern sich der tatsächlichen Fläche an und jetzt kommt das Entscheidende dieses Beweises: Erhöht man die Balkenzahl bis ins Unendliche, dann sind Unter- und Obersumme identisch mit der tatsächlichen Fläche: Es gilt sozusagen:

$$\textit{Untersumme}(U) = \textit{tatsächliche Fläche}(A) = \textit{Obersumme}(O)$$

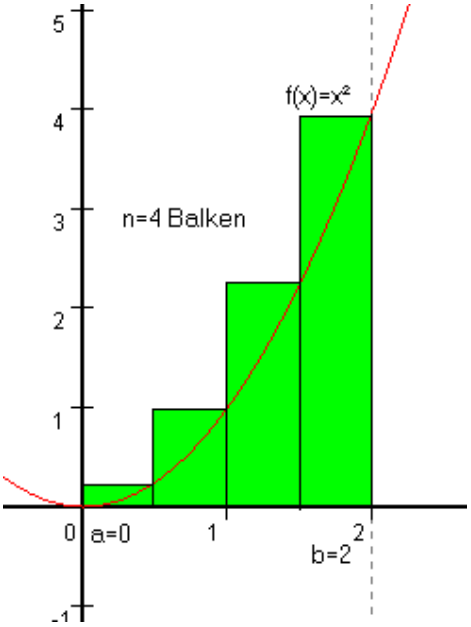
© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

Bevor es mit dem Beweis weitergeht, solltest du die Sache mit der Unter- und Obersumme nochmals an einer anderen Funktion üben. Versuche doch mal die Untersumme und die Obersumme für die Funktion $f(x) = x^2$ in dem Intervall von 0 bis 2, also [0;2] zu bestimmen. Die Balkenanzahl n soll wieder n = 4 sein. Versuche zunächst die Skizzen für Unter- und Obersumme selbständig anzufertigen. Lass dich bei der Untersumme nicht irritieren, dass nur 3 grüne Balken vorhanden sind. Der erste Balken (zwischen 0 und 0,5) ist nicht zu sehen, da seine Balkenhöhe 0 ist.

Für die **Untersumme** erhältst du:



Für die **Obersumme** erhältst du:



Wenn du die Skizzen kontrolliert hast, kannst du die Unter- und die Obersumme berechnen. Denke auch hierbei wieder an den Grundgedanken, dass ein Balken mit Balkenbreite mal Balkenhöhe berechnet wird. Für die Balkenbreite haben wir eine Formel, während die Balkenhöhe durch einsetzen von x-Werten in die Funktion berechnet wird. Bei der Untersumme den linken Balkenrand und bei der Obersumme den rechten Balkenrand für x einsetzen.

Für obiges Beispiel müssten folgende Werte herauskommen:

$$U_4 = 1{,}75 \qquad und \qquad O_4 = 3{,}75$$

Nachdem du jetzt fit bezüglich Untersumme und Obersumme bist, können wir jetzt endlich den Beweis im gesamten angehen.

© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

Ich halte nochmals kurz fest, was wir bisher gelernt haben:

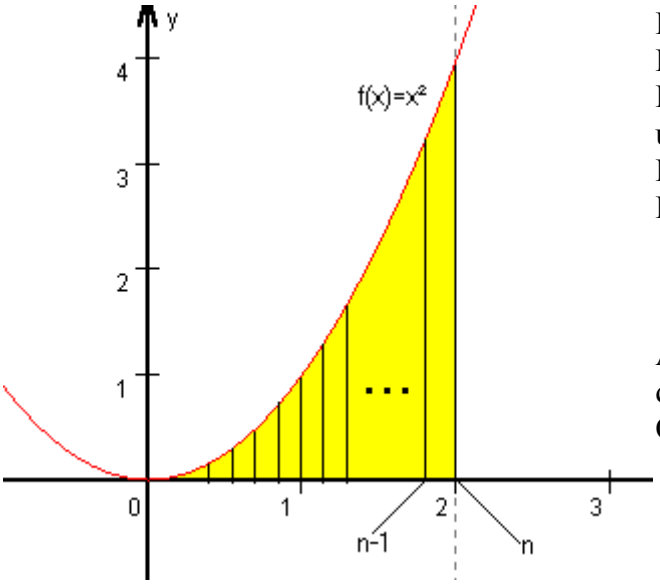
Die Untersumme ist immer kleiner als die tatsächliche Fläche, während die Obersumme immer größer ist. Beide nähern sich der tatsächlichen Fläche an, wenn wir die Anzahl der Balken bei der Berechnung größer werden lassen. Wird die Anzahl der Balken sogar so groß, dass man sagen kann, dass es unendliche viele Balken sind, dann ist die Untersumme (U) und die Obersumme (O) genau so groß wie die tatsächliche Fläche (A). Wir können also folgende Ansätze aufstellen

$$A = \lim_{n\to\infty} U_n \qquad und \qquad A = \lim_{n\to\infty} O_n \qquad \text{mit n = Balkenanzahl}$$

Der Integralsbeweis kann sowohl über die Untersumme als auch über die Obersumme erfolgen.

Beginne wir mit der Obersumme, über die es etwas einfacher funktioniert:

Schauen wir uns zunächst den Sachverhalt an, diesmal allerdings in allgemeiner Form. Bekannt ist lediglich die Funktion $f(x) = x^2$ und das Intervall [0;2]. Bestimmt werden soll der Flächeninhalt zwischen Funktion und x-Achse in dem angegebenen Intervall. Wir wissen, dass man diese Fläche bestimmen kann, wenn man eine Formel für die Obersumme aufstellt, und darin die Anzahl der Banken gegen unendlich laufen lässt. Stellen wir zunächst eine Formel für die Obersumme auf. Diese besteht ja bekanntlich aus vielen Balken, wobei die Fläche eines Balkens mit Balkenbreite mal Balkenhöhe berechnet werden kann. Für die Balkenbreite haben wir eine Formel, während die Balkenhöhe bei der Obersumme durch Einsetzen des rechten Balkenrandes in die Funktion berechnet werden kann. Aber schauen wir zunächst in die Skizze. Beachte, dass die Anzahl der Balken nicht bekannt ist, da sie am Ende des Beweises gegen unendlich läuft. Bekannt ist lediglich, dass der letzte Balken der n-te Balken und der vorletzte der (n-1)-te Balken ist.



Der x-Wert des rechten Randes des ersten Balkens ist die Balkenbreite B. Der rechte Rand des zweiten Balkens ist bei 2 mal B usw. Der rechte Rand des vorletzten Balkens ist (n-1) mal B und der rechte Rand des letzten Balkens ist n mal B.

Aus nebenstehender Skizze ergibt sich auf der nächsten Seite ein Ansatz für die Obersumme

© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

Für die Obersumme gilt wie bereits erwähnt Balkenbreite mal Balkenhöhe. Die Formel für die Balkenbreite (B) sei hier nochmals erwähnt, wobei im nächsten Schritt die Werte für den rechten Intervallrand a = 0 und b = 2 eingesetzt wurden. Die Balkenanzahl n ist unbekannt:

$$B = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Die Obersumme wird wie gesagt mit Balkenbreite mal Balkenhöhe berechnet, wobei letztere durch Einsetzen des rechten Balkenrandes in die Funktion berechnet wird. Der rechte Rand des ersten Balkens ist 1 Mal B, der des zweiten Balkens 2 mal B usw. Dies ist rechts neben der Skizze auf der vorderen Seite schon erläutert worden. Aus alledem folgt:

$$\begin{aligned}
O_n &= B \cdot f(1 \cdot B) + B \cdot f(2 \cdot B) + \cdots + B \cdot f\big((n-1) \cdot B\big) + B \cdot f(n \cdot B) \\
O_n &= B \cdot \big[f(1 \cdot B) + f(2 \cdot B) + \cdots + f\big((n-1) \cdot B\big) + f(n \cdot B)\big] \\
O_n &= B \cdot \big[1^2 \cdot B^2 + 2^2 \cdot B^2 + \cdots + (n-1)^2 \cdot B^2 + n^2 \cdot B^2\big] \\
O_n &= B^3 \big[1^2 + 2^2 + \cdots\cdots + (n-1)^2 + n^2\big]
\end{aligned}$$

Jetzt müssen wir mal kurz durchatmen. Die allererste Zeile ist schon gleich ein Hammer. Grundlage ist Balkenbreite (B) mal Balkenhöhe, wobei für dich sicherlich schwer nachzuvollziehen ist, wo die B's in der Funktionsklammer herkommen. Das ist jeweils der rechte Rand der Balken. Falls du an der Stelle Probleme hast, schau nochmals auf der vorigen Seite in dem Text rechts neben der Skizze nach. In Zeile 2 wurde B einfach ausgeklammert, In Zeile 3 wurde berücksichtigt, dass f(x) = x² ist. In der letzten Zeile wurde dann noch mal B² ausgeklammert. Soweit alles okay? Im Folgenden wird die eckige Klammer ersetzt. Die eckige Klammer ist ja die quadratische Reihe und für die gilt:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{n \cdot \left(2n^2 + n + 2n + 1\right)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Der Ausdruck wurde hinten raus einfach ausmultipliziert und ersetzt im Folgenden die eckige Klammer. Die Balkenbreite B wird dann übrigens mit 2 durch n ersetzt, gemäß obiger Formel:

$$O_n = B^3 \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$O_n = \frac{8}{6} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{n^3 \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^3} = \frac{4}{3} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

Wir erhalten einen Ausdruck, mit dem wir die Obersumme in Abhängigkeit von der Balkenanzahl n berechnen können. Am Anfang von diesem Beweis haben wir gesagt, dass die Obersumme der tatsächlichen Fläche entspricht, wenn n gegen unendlich läuft, die Anzahl der Balken also unendlich groß ist. Wir setzen das mit dem Grenzwert Limes um:

$$\lim_{n \to \infty} O_n = O_\infty = \frac{4}{3} \cdot \left(2 + \frac{3}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}\right) = \frac{4}{3} \cdot (2 + 0 + 0) = \frac{4}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}$$

Diesen Wert können wir später ganz einfach mit Hilfe eines bestimmten Integrals berechnen.

© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

Den gleichen Beweis können wir auch über die Untersumme führen, wobei wir nur beachten müssen, dass wir bei der Balkenhöhe den linken Balkenrand in die Funktion einsetzen müssen

$$U_n = B \cdot f(0 \cdot B) + B \cdot f(1 \cdot B) + \cdots + B \cdot f((n-1) \cdot B)$$
$$U_n = B \cdot \left[f(0 \cdot B) + f(1 \cdot B) + \cdots + f((n-1) \cdot B) \right]$$
$$U_n = B \cdot \left[0^2 \cdot B^2 + 1^2 \cdot B^2 + \cdots + (n-1)^2 \cdot B^2 \right]$$
$$U_n = B^3 \left[0^2 + 1^2 + \cdots\cdots + (n-1)^2 \right]$$

An dieser Stelle bekommen wir allerdings ein kleines Problem, denn der Klammerinhalt entspricht nicht der quadratischen Reihe, denn ganz hinten fehlt ein n^2. Das Problem wird gelöst, indem wir einmal n^2 addieren und anschließend sofort n^2 wieder abziehen. Insgesamt vollziehen wir eine neutrale Veränderung, allerdings steht jetzt die quadratische Reihe da.

$$U_n = B^3 \cdot \left[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 - n^2 \right]$$

Vergleiche selbst, jetzt handelt es sich um die quadratische Reihe, ergänzt um $-n^2$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{n \cdot \left(2n^2 + n + 2n + 1\right)}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Wir erhalten dann in der nächsten Zeile:

$$U_n = B^3 \cdot \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - n^2 \right]$$

Versuche doch mal, diesen Beweis alleine zu Ende zu bringen. Die Vorgehensweise beschreibe ich dir:

1. Ersetze B mit **„2 durch n“** und lasse dann den Exponenten, also die 3 wirken.
2. In der eckigen Klammer musst du die beiden Brüche zusammenfassen. Dafür musst du n^2 mit 6 erweitern.
3. Vertausche die Nenner der beiden Brüche, also 6 mit n^3
4. Jetzt musst du n gegen unendlich laufen lassen, wobei du vor Ausführung des Grenzübergangs im Zähler n^3 ausklammern und anschließend wegkürzen musst.
5. Nach Durchführung des Grenzübergangs müsstest du auch wieder 8/3 erhalten.

Wichtig für die Durchführung anderer Beweise:

Im obigen Beispiel handelte es sich um die quadratische Funktion $f(x) = x^2$ und im Verlauf des Beweises ist die quadratische Reihe aufgetaucht. Bei Linearen Funktionen taucht allerdings die lineare Reihe und bei Funktionen dritten Grades die kubische Reihe auf. Dann helfen folgende Reihen weiter:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \qquad \textit{und} \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$$

© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.