8.7. Rotationskörper

Rotationskörper entstehen, wenn man Funktionen um eine Achse (normalerweise die x-Achse) rotieren, also drehen, lässt. Dabei sollte man ein Gespür dafür entwickeln, wie der Körper aussieht, wenn man bestimmte Funktionstypen rotieren lässt. Hier hilft der Gedanke, dass der Körper, der beim Rotieren der Funktion entsteht, auf der Seite liegt, da man um die x-Achse rotiert. Um besser erkennen zu können, was das für ein Körper ist, muss man ihn aufrichten d.h. um 90 Grad meist nach rechts drehen.

Überlegen Sie doch mal, welcher Körper entsteht, wenn man folgende Funktionen um die x-Achse rotieren lässt. Man lässt übrigens nicht die gesamte Funktion rotieren, sondern nur einen Teil, ein Intervall. Sagen wir in diesem Fall im Intervall von [0;3].

a) f(x) = 2 (Konstante Funktion, eine waagrechte Gerade)
b) f(x) = 0,5x (Lineare Funktion, eine ansteigende Gerade durch den Ursprung)
c) f(x) = x^2 (Quadratische Funktion, Normalparabel

Im Fall a wird ein Zylinder entstehen, der einen Radius von 4 aufweist. Im Fall b ein Kegel und im Fall c ein Körper, der einem Vulkan ähnelt. Alle Körper haben übrigens eine Höhe von 3, welche sich aus dem Intervall ergibt. Wie bereits oben erwähnt, liegen auch alle Körper zunächst mal auf der Seite, was daran liegt, dass man die Funktionen um die x-Achse rotieren lässt. **Schau doch mal auf der nächsten Seite. Dort sind obige Rotationskörper (a bis c) abgebildet.**

Warum taucht dieses Thema jetzt hier im Kapitel Integralrechnung auf? Nun, man kann mithilfe der Integralrechnung das Volumen dieser Körper berechnen und zwar mit folgendem Ansatz:

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} &V = Volumen \\ &[a;b] = Intervallsgrenzen\,(Höhe) \\ &f(x) = Funktion \end{aligned}$$

Man setzt in diese Formel einfach die Intervallsgrenzen und die Funktion ein und rechnet folgendermaßen weiter. Zunächst wird die Funktion quadriert, dann integriert und anschließend, da es ein bestimmtes Integral ist, Obergrenze minus Untergrenze. Am Schluss wird noch mit Pi multipliziert und man erhält dann das Volumen des Körpers.

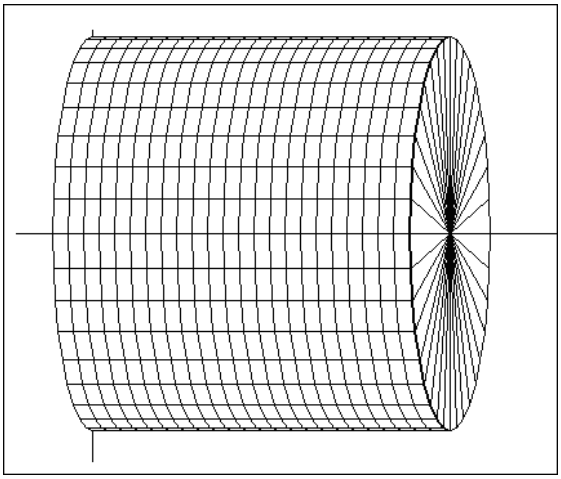
Will man übrigens eine Funktion **um die y-Achse rotieren lassen**, so muss man die Umkehrfunktion bilden und diese dann rotieren lassen, sprich die Werte in obige Formel einfach einsetzen, wobei die Intervallsgrenzen dann eine Strecke auf der y-Achse sind.

Man kann übrigens auch **die Fläche zwischen 2 Funktionen rotieren lassen**. Dazu benutzt man folgende Formel

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x)\right]^2 - \left[g(x)\right]^2 dx$$ mit f(x) und g(x) als 2 Funktionen

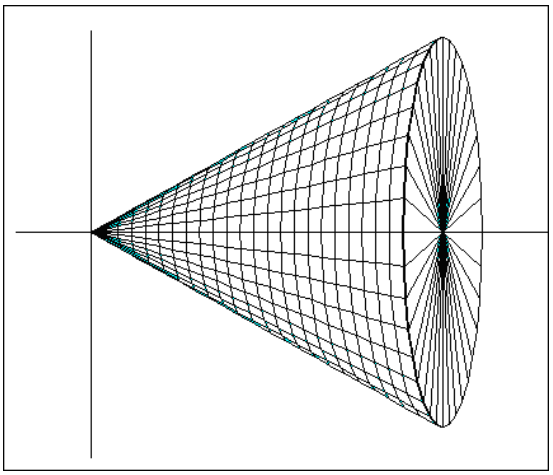
Einige Rotationskörper

f(x) = 2 im Intervall [0;3]



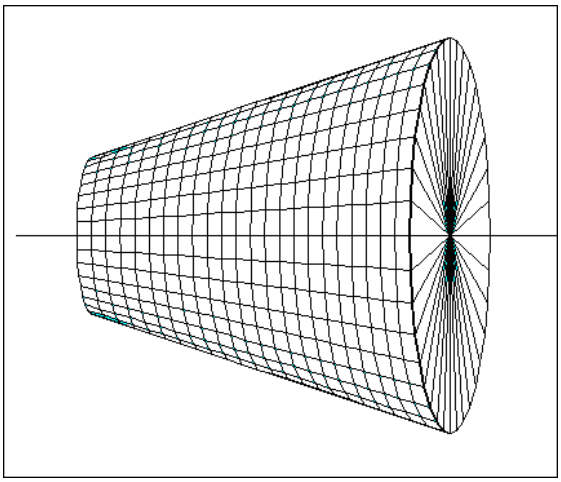
Es entsteht ein Zylinder

f(x) = 0,5x im Intervall [0;3]



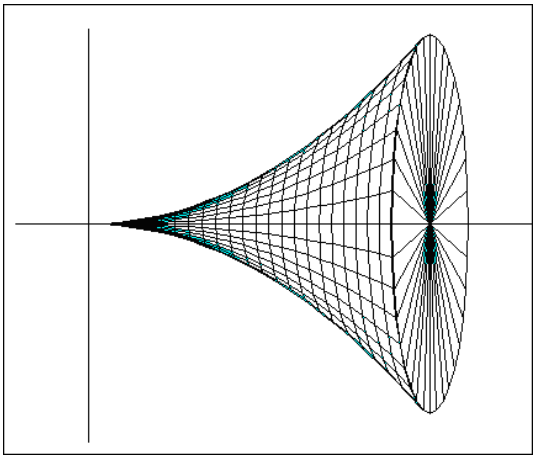
Es entsteht ein Kegel

f(x) = 0,5x im Intervall [2;5]



Es entsteht ein Kegelstumpf

f(x) = x^2 im Intervall [0;3]



Es entsteht ein Vulkan

Beispielaufgabe zum Thema Rotationskörper

Bestimme das Volumen des Rotationskörpers der entsteht, wenn man folgende Funktion f(x) = 2 um die x-Achse rotieren lässt, und zwar im Intervall [0 ; 3]

a) mit Hilfe der Formel für das Volumen von Rotationskörpern,
b) mit Hilfe von einer aus der Geometrie bekannten Formel.

Ansatz über die Formel für Rotationskörper

$$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x)\right]^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^3 [2]^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^3 4 \, dx = \pi \cdot [4x]_0^3 = \pi \cdot (4 \cdot 3 - 4 \cdot 0) = 12\pi = 37{,}7$$

In den Ansatz werden die Intervallsgrenzen und die Funktion eingesetzt. Die Funktion wird quadriert und anschließend integriert. Hier wird ein Konstante integriert, die addiert wird. Diese werden beim Integrieren mit der Variable versehen, nach der integriert wird. Da es ein bestimmtes Integral ist, muss noch Obergrenze minus Untergrenze angewendet werden. Abschließend wird mit Pi multipliziert.

Ansatz über eine Formel aus der Geometrie:

Der Rotationskörper ist ein Zylinder, also ein Prisma. Für Prismen gilt für das Volumen:

$$V = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Die Grundfläche G ist ein Kreis und wird mit Pi mal r² berechnet. Die Variable h ist die Höhe.

Setzen wir in diese Formel den Radius 2 und die Höhe 3 ein. Die Höhe ergibt sich aus den Intervallsgrenzen, und auf den Radius muss man durch Überlegung kommen, indem man sich den auf der Seite liegenden Zylinder vorstellt.

$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = \pi \cdot 4 \cdot 3 = 12\pi = 37{,}7$ gleiches Ergebnis wie oben

Jetzt sagst du bestimmt, die zweite Version ist viel einfacher. Das stimmt. Trotzdem hat die Volumenberechnung über die Formel für Rotationskörper eine wichtige Bedeutung, denn man kann nicht nur so einfache Rotationskörper (Zylinder) berechnen. Die Funktion f(x), die den Rand und damit das Aussehen des Körpers bestimmt, kann beliebig sein. Es entstehen also Rotationskörper, deren Volumen man nicht mit Formeln aus der Geometrie bestimmen kann.

Versuche doch mal das Volumen folgender Rotationsköper zu bestimmen:

Funktion: f(x) = 0,5x in den Grenzen [0;3] und anschließend in den Grenzen [2;5]

Im ersten Fall entsteht ein Kegel (V = 7), im zweiten Fall ein Kegelstumpf (V = 30,6).