7.2.6. Partielle Ableitungen

Bisher haben wir nur die Ableitung von Funktionen gebildet, die nur von einer Variable abhängig sind z.B. f(x). Es gibt aber auch Funktionen, die von mehreren Variablen abhängig sind z.B. f(x;y) ist eine Funktion, die von den Variablen x und y abhängig ist. Auch solche Funktionen können wir ableiten, wobei wir uns bei der Ableitung entscheiden müssen, nach welcher Variable abgeleitet werden soll. Nach x oder nach y. Man spricht dann von der Partiellen Ableitung.

Bei der Partiellen Ableitung behandelt man die Variablen, nach denen man nicht ableitet, wie Konstanten. Noch mal kurz zur Erinnerung, was mit Konstanten beim Ableiten passiert:

Konstanten, die addiert oder subtrahiert werden, fallen beim Ableiten weg.
Konstanten, die multipliziert werden, bleiben allerdings erhalten.

Jetzt muss man sich nur noch auf die Schreibweise einigen:

$f_x =$ Die Funktion wurde ein mal nach x abgeleitet
$f_{xx} =$ Die Funktion wurde 2 mal nach x abgeileitet
$f_{xy} =$ Die Funktion wurde zuerst nach x und dann nach y abgeleitet
$f_{yx} =$ Die Funktion wurde zuerst nach y und dann nach x abgeleitet

Wer mag, kann auch noch die Striche für die Anzahl der Ableitungen anfügen, aber durch den Index ist eigentlich schon klar, ob einmal oder zweimal abgeleitet wurde. Wer es ganz ausführlich machen möchte, der kann die Variablen, von denen die Funktion abhängt, in Klammern hinter das f schreiben, allerdings wird dadurch der Ausdruck dann wieder unübersichtlicher.

Soviel zur Theorie. Probieren wir das doch mal an einem Beispiel aus.

$$f(x;y) = 5x^2y^2 + 3x^2y + 5y$$
$$f_x = 10xy^2 + 6xy$$
$$f_{xx} = 10y^2 + 6y$$
$$f_y = 10x^2y + 3x^2 + 5$$
$$f_{yy} = 10x^2$$

Kurze Erklärung zu der ersten Ableitung nach x: $5y^2$ muss man als Konstante, die multipliziert wird, ansehen. $5x^2$ bleibt deshalb erhalten und wird mit 2 multipliziert, da die Ableitung von x^2 eben 2x ist. 5y hingegen fasst man als eine Konstante, die addiert wird, auf. Sie fällt deswegen auch weg. Versuche die anderen Ableitungen genau so nachzuvollziehen

Um das ein wenig zu üben, bilde doch mal alleine folgende Ableitungen: f_{xy} *und* f_{yx}
Wenn du richtig gerechnet hast, dann kommt bei beiden das Gleiche raus, denn gemäß dem **„Satz von Schwartz“** gilt: $f_{xy} = f_{yx}$