7.2.5. Kettenregel

Die Kettenregel ist eigentlich gar keine richtige Formel. Sie wird angewendet, wenn man verknüpfte Funktionen ableiten will. Da die Sache mit der Verknüpfung eigentlich nur verwirrt, will ich da gar nicht näher darauf eingehen. Für dich ist wichtig, dass du die Funktionen erkennst, bei denen Kettenregel anzuwenden ist. Damit du das kannst, zeige ich dir viele Beispiele, bei denen Kettenregel anzuwenden ist. Aber was besagt denn nun die Kettenregel:

Kettenregel: Die Ableitung erfolgt durch Äußere Ableitung mal Innere Ableitung

Was soll das nun bedeuten? Zunächst einmal scheint es da was Inneres und was Äußeres zu geben. Am folgenden Beispiel soll das klar werden.

$$f(x) = \left(x^2 + 5\right)^4 \quad => \quad f'(x) = \underbrace{4 \cdot \left(x^2 + 5\right)^3}_{\text{Äußere}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{Innere}} = 8x \cdot \left(x^2 + 5\right)^3$$

Wenn wir uns nun überlegen, was innen und außen ist. Innen ist der Klammerinhalt und außen soll die Klammer eben mit 4 potenziert werden. Die Äußere Ableitung geschieht einfach dadurch, dass man den Exponenten vor die Klammer zieht und anschließend um 1 verringert. Der Ablauf ist also wie bei der aller ersten Grundregel, die wir ganz am Anfang kennen gelernt haben. Die Innere Ableitung ist die Ableitung des Klammerinhaltes. Zuletzt wurde zwecks Vereinfachung noch ausmultipliziert. Am Schluss bitte nicht auf die Idee kommen, die 8x mit der Klammer auszumultiplizieren. Das funktioniert hier nicht, weil an der Klammer die Potenz hoch 3 dran steht und es gilt ja der Grundsatz: **„Potenzieren vor Multiplizieren“.**

$$f(x) = \sqrt{3x - 4} = (3x - 4)^{\frac{1}{2}} \quad => \quad f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot (3x - 4)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3 = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3x - 4}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{3x - 4}}$$

Hier ist auch wieder Kettenregel angesagt, da wir etwas innen und außen haben. Innen ist 3x-4 und außen ist die Wurzel. Bevor wir nun per Kettenregel ableiten, müssen wir den Wurzelausdruck als Klammer schreiben (bei Problemen siehe Potenzregeln). Die entstehende Klammer wird wie im ersten Fall abgeleitet. Exponent davor ziehen und anschließend um 1 verringern. Vorsicht, hier entsteht dann – ½ im Exponenten. Wegen Kettenregel dann noch mit der Inneren Ableitung (hier 3) multiplizieren. Die Zahl vor der Klammer und hinter der Klammer darf man wieder ausmultiplizieren und der negative Exponent bewirkt, dass die Klammer im Nenner auftaucht. In diesem Schritt wurde dann auch gleich wieder die Klammer in einen Wurzelausdruck zurückverwandelt. Nochmals: Wer Probleme mit negativem Exponenten und der Umwandlung von Bruchpotenzen in Wurzelausdrücke hat, sollte sich das Kapitel „Potenzregeln“ S.37 noch mal ganz genau ansehen. Im letzten Schritt wurde der Bruch in eine Dezimalzahl umgewandelt und dann in den Zähler des Bruches geschrieben. Eine ganz normale Vereinfachung von ganzen Zahlen und Brüchen.

Die Funktionen, die auf dieser Seite abzuleiten sind, findest du alle im Kapitel **„Besondere Funktionen und deren Ableitung“** S.206 in den 3 untersten Kästen wieder. Dort tauchen die Funktionen allerdings nur mit x (als Argument) auf**. Ist das Argument komplexer, dann muss man mit der Kettenregel arbeiten !!!**

Eine typische Anwendung der Kettenregel sind Trigonometrische Funktionen

$$f(x) = \sin(x^3) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \underbrace{\cos(x^3)}_{\text{Äußere}} \cdot \underbrace{3x^2}_{\text{Innere}} = 3x^2 \cdot \cos x^3$$

Erkennst du alleine, dass hier etwas innen und etwas außen ist? Innen ist das Argument, also das, worauf sich der Sinus bezieht. Außen ist der Sinus selbst. Die Äußere Ableitung ergibt dann den Kosinus, da dieser eben die Ableitung von Sinus ist. Das Argument bleibt hier übrigens erhalten. Die Ableitung des Inneren (also des Argumentes) wird dann einfach noch multipliziert. Das Argument sollte man aus Sicherheitsgründen einklammern, da man ansonsten auf die Idee kommt, x^3 mit $3x^2$ auszumultiplizieren. Durch Vertauschen der Faktoren wird klar, dass man das nicht tun sollte. Noch eine Anmerkung zu dem Exponenten 3 ganz hinten. Gemeint ist hier, dass man x hoch 3 nehmen soll und davon anschließend den Kosinus berechnet. Nicht gemeint ist, dass man von x den Kosinus berechnen soll und das dann mit 3 potenzieren soll. Das würde folgendermaßen aussehen: $\cos^3 x$ oder $(\cos x)^3$

Die Exponentialfunktion (e hoch x) ist auch ein typischer Fall für Kettenregel, allerdings kann man da nicht so gut erkennen, was innen und was außen ist. Innen ist in dem Fall oben, nämlich der Exponent. Außen ist die e-Funktion.

$$f(x) = e^{3x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \underbrace{e^{3x^2}}_{\text{Äußere}} \cdot \underbrace{6x}_{\text{Innere}}$$

Die Äußere Ableitung bewirkt nur, dass das Teil noch mal hingeschrieben wird, denn die Ableitung von e hoch x ist ja e hoch x, wie wir bereits früher schon gesehen haben. Das braucht man dann nur noch mit der Inneren Ableitung, also der Ableitung des Exponenten, multiplizieren. Man kann sich hier auch **kurz** merken: **Schreibe beim Ableiten die Funktion noch mal hin und multipliziere mit der Ableitung des Exponenten.**

Der natürliche Logarithmus. Auch wieder Kettenregel

$$f(x) = \ln(x^2 + 3x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x} \cdot (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

Hier ist wieder eindeutiger, was innen und was außen ist. Innen ist das Argument, der Klammerinhalt, worauf sich der natürliche Logarithmus bezieht. Außen ist der natürliche Logarithmus selbst. Die Ableitung des natürlichen Logarithmus ist 1 durch x. Es entsteht hier als Äußere Ableitung daher 1 durch das Argument. Das muss man dann noch mit der inneren Ableitung, also der Ableitung des Argumentes, multiplizieren. Am Schluss wird der Bruch noch mit der Klammer multipliziert. Bitte hier dann nicht mehr auf die Idee kommen, dass man was wegkürzen kann. Die Pluszeichen verbieten das und da nicht in jedem Teil ein x drin ist, kann man nicht kürzen. Für die Ableitung des natürlichen Logarithmus kann man sich auch kurz merken: 1 durch das Argument mal die Ableitung des Argumentes.