7.2.3. Produktregel

Bisher können wir Funktionen der Art f(x) = 3x² + 5x + 9 oder f(x) = 10x + sin(x) ableiten. Wie sieht es aber mit f(x) = 3x² · 5x · 9 oder f(x) = 10x · sin(x) aus. Im ersten Fall kann man einfach ausmultiplizieren und dann nach bereits bekannten Regeln ableiten. Man sollte beim Ableiten übrigens immer vorher versuchen, zu vereinfachen. Man spart sich dadurch Arbeit. Die erste Funktion geht also nach dem Vereinfachen ganz normal. Die jeweilige zweite Funktion betrachten wir uns etwas genauer.

$$f(x) = 10x + \sin(x) \qquad\qquad f(x) = 10x \cdot \sin(x)$$
$$f'(x) = 10 + \cos(x) \qquad\qquad f'(x) \neq 10x \cdot \cos(x)$$

Auf der linken Seite trennt das Plus die Funktion in zwei Teile und gemäß Summenregel darf ich diese Teile dann auch getrennt ableiten. Auf der rechten Seite haben wir kein Plus, sondern einen Malpunkt. Dieser erlaubt uns nicht, dass wir einfach getrennt ableiten. Ich hoffe du hast das „ist nicht- Zeichen“ bei der ersten Ableitung rechts nicht übersehen. **Wir halten also fest, dass es bei Multiplikation (rechts) nicht so einfach funktioniert wie bei Strichrechnung (links).** Auf der rechten Seite muss die **Produktregel** angewendet werden.

Die Produktregel:

$$f(x) = u \cdot v$$
$$f'(x) = u' \cdot v + v' \cdot u$$

Bei Anwendung der Produktregel empfehle ich immer eine kleine Tabelle anzufertigen, die aus allen in der Ableitung benötigten Dingen besteht, also u, v, u Strich und v Strich. Diese Werte werden dann einfach in die Formel eingesetzt und anschließend wird, falls möglich, noch etwas vereinfacht (ausmultiplizieren oder ausklammern). Wer schon oft die Produktregel angewendet hat, kann irgendwann auf das anlegen der Tabelle verzichten und sich folgendes merken. Der folgende Satz gibt nicht genau obige Schreibweise wider, bedeutet mathematisch allerdings das Gleiche: Das erste (u) mal die Ableitung vom zweiten plus das zweite (v) mal die Ableitung vom ersten.

Nach so viel Theorie einige Praxisbeispiele: Beginnen wir mit obiger Aufgabe !

$$f(x) = 10x \cdot \sin(x)$$
$$f'(x) = 10 \cdot \sin(x) + \cos(x) \cdot 10x \qquad \text{mit} \qquad u = 10x \quad u' = 10 \quad v = \sin(x) \quad v' = \cos(x)$$
$$f'(x) = 10 \cdot (\sin x + x \cdot \cos x)$$

Beachte links in der mittleren Zeile, dass man das Argument von Sinus und Kosinus (jeweils das x) in Klammern setzt, um Missverständnisse auszuschließen. Ohne Klammern käme man vielleicht auf die Idee, x und 10x zu multiplizieren, was hier nicht geht. In der dritten Zeile hat man das Problem elegant gelöst, indem man das x vor den Kosinus geschrieben hat, denn bei Multiplikation kann man ja die Faktoren vertauschen.

$$f(x) = 3x^2 \cdot e^x$$
$$f'(x) = 6x \cdot e^x + e^x \cdot 3x^2 \qquad \text{mit} \qquad u = 3x^2 \quad u' = 6x \quad v = e^x \quad v' = e^x$$
$$f'(x) = 3xe^x \cdot (2 + x)$$