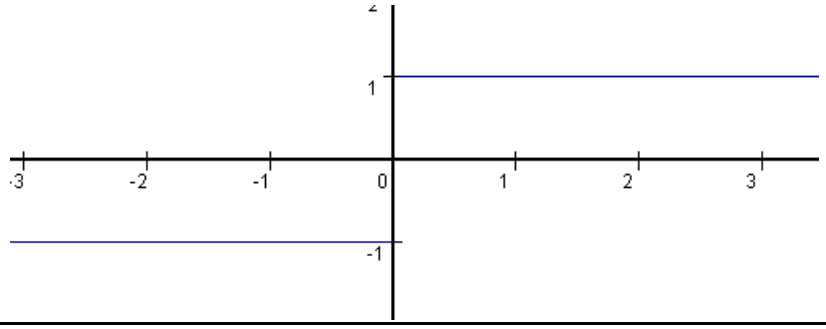
5.4.6. Stetigkeit

Man kann einzelne Stellen x_0 einer Funktion hinsichtlich der Stetigkeit untersuchen.
Eine Funktion ist übrigens stetig, wenn man sie ohne den Stift abzusetzen zeichnen kann.
Funktionen mit Sprüngen, wie z.B. die Signum Funktion (Skizze), sind nicht stetig. Um die Funktion zeichnen zu können, muss man den Stift absetzen.



Vorgehensweise bei der Überprüfung der Stetigkeit.

Ist die Funktion an der Stelle x_0 stetig, dann ergeben folgende 3 Ansätze immer den gleichen Wert c:

$$f(x_0) = c$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x_0) = c$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x_0) = c$$

Was muss man also machen. Zunächst einmal setzt man die Stelle x_0 in die Funktion ein. Anschließend muss man zwei Grenzwertberechnungen durchführen. Man nähert sich jeweils der Stelle x_0, allerdings einmal aus dem positiven Bereich und einmal aus dem negativen Bereich. Wenn alle 3 Ergebnisse identisch sind, dann ist die Funktion an der Stelle x_0 stetig. Die gesamte Funktion ist stetig, wenn die Stetigkeit an jedem Punkt der Funktion erfüllt ist.

Die Eigenschaft der Stetigkeit von Funktionen im Zusammenhang mit der Differentialrechnung

Ist eine Funktion an der Stelle x_0 differenzierbar, dann ist sie auf jeden Fall auch an dieser Stelle stetig.

Umgekehrt kann man aber nicht sagen, dass eine Funktion an einer Stelle, an der sie stetig ist, auch differenzierbar ist. Dies ist z.B. bei Knicken der Fall. Ein Knick in der Funktion lässt immer noch die Eigenschaft der Stetigkeit zutreffen, allerdings an Knicken sind Funktionen nicht differenzierbar, da man in Knicken die Steigung nicht eindeutig bestimmen kann.