6.7. Verhalten der Funktion für betragsgroße x, also Unendlich +∞ und -∞

Bei dieser Untersuchung möchte man wissen, was passiert mit der Funktion, genauer gesagt mit den y-Werten der Funktion, wenn man für x sehr große positive und negative Werte einsetzt. Diese Informationen sind sehr nützlich für das Zeichnen der Funktion.
Dieser Teil der Kurvendiskussion ist für viele unangenehm, weil dabei der Grenzwert der Funktion einmal für +∞ und auch für -∞ berechnet werden muss. Die beiden allgemeinen Ansätze dazu lauten:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Für f(x) braucht man dann nur noch die Funktion einsetzen und anschließend den Grenzwert bestimmen. Lies bitte auf jeden Fall auch noch mal das Kapitel „Grenzwert“ S.68 und dort insbesondere den Abschnitt Rechnen mit Unendlich S.69. Beides wird an dieser Stelle sehr weiterhelfen.

Schauen wir uns zwei Beispiele an, die ich hier mit einem stark vereinfachenden Verfahren löse. Falls ihr in der Schule etwas anders vorgeht, und du unbedingt so vorgehen möchtest dann schau dir die beiden nächsten Seiten an.

Beispiel 1 für ganz-rationale Funktionen: $f(x) = 5x^2 - 6x + 2$

Man beachtet nur den Teil mit der höchsten Potenz und ignoriert den Rest

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 5x^2 - 6x + 2 = \lim_{x\to\infty} 5x^2 = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 5x^2 - 6x + 2 = \lim_{x\to-\infty} 5x^2 = \infty$$

Den Inhalt der beiden Zeilen kann man dann noch folgendermaßen aufschreiben

$$x \to +\infty \quad y \to +\infty \qquad \textit{und} \qquad x \to -\infty \quad y \to +\infty$$

Auf der nächsten Seite wird die Bedeutung dieser Untersuchung grafisch dargestellt.

Beispiel 2 für gebrochen-rationale Funktionen: $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$

Hier beachtet man im Zähler **und** im Nenner nur den Teil mit der höchsten Potenz und kürzt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0^-$$

Den Inhalt der beiden Zeilen kann man dann noch folgendermaßen aufschreiben

$$x \to +\infty \quad y \to 0^+ \qquad \textit{und} \qquad x \to -\infty \quad y \to 0^-$$

Auf der übernächsten Seite wird die Bedeutung dieser Untersuchung grafisch dargestellt

Mehr Beispiele mit gebrochen-rationalen Funktionen findest du im Kapitel Grenzwert auf der Seite 71

Beispiel 1: Bestimme das Verhalten der folgenden Funktion für betragsgroße x.

$$f(x) = 5x^2 - 6x + 2$$

Wir bilden zunächst den Ansatz mit +∞ und anschließend den mit -∞

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 5x^2 - 6x + 2 = 5 \cdot \infty^2 - 6 \cdot \infty + 2 = \infty - \infty = \textit{nicht definiert}$$

Unendlich minus unendlich ist nicht definiert, da man nicht weiß, ob beide Unendliche gleich groß sind. Wir müssen also Ausklammern.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 5x^2 - 6x + 2 = \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot \left(5 - \tfrac{6}{x} + \tfrac{2}{x^2}\right) = \infty^2 \cdot \left(5 - \tfrac{6}{\infty} + \tfrac{2}{\infty^2}\right) = \infty \cdot (5 - 0 + 0) = \infty \cdot 5 = \infty$$

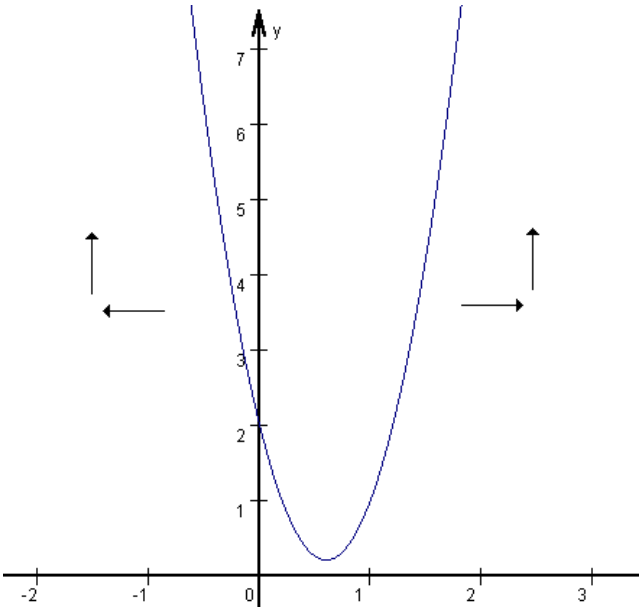
Um Probleme bei Minus Unendlich zu vermeiden, benutzen wir gleich die ausgeklammert Form

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 5x^2 - 6x + 2 = \lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot \left(5 - \tfrac{6}{x} + \tfrac{2}{x^2}\right) = (-\infty)^2 \cdot \left(5 - \tfrac{6}{(-\infty)} + \tfrac{2}{(-\infty)^2}\right) = \infty \cdot (5 + 0 + 0) = \infty \cdot 5 = \infty$$

Das Ergebnis dieser beiden Berechnungen schreiben wir noch mal ordentlich auf, damit wir die Information beim zeichnen besser verwenden können

$$x \to +\infty \quad y \to +\infty \qquad \textit{und} \qquad x \to -\infty \quad y \to +\infty$$

Man spricht: x gegen plus Unendlich, dann geht y auch gegen + Unendlich und x gegen minus Unendlich, dann geht y gegen + Unendlich



Die Pfeile sollen noch mal deutlich das Verhalten der Funktion für betragsgroße x darstellen. Je größer die x-Werte in beide Richtungen (plus und minus unendlich) werden, desto größer werden auch die y-Werte der Funktion.

Beispiel 2: Bestimme das Verhalten der folgenden Funktion für betragsgroße x.

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Wir bilden zunächst den Ansatz mit +∞ und anschließend den mit -∞

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2\cdot\infty}{\infty^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \textit{nicht definiert}$$

Unendlich durch unendlich ist nicht definiert, da man nicht weiß, ob beide Unendliche gleich groß sind, da dann ja 1 herauskommen würde. Wir müssen also Ausklammern.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x+\frac{1}{x}} = \frac{2}{\infty+\frac{1}{\infty}} = \frac{2}{\infty+0} = \frac{2}{\infty} = 0^+$$

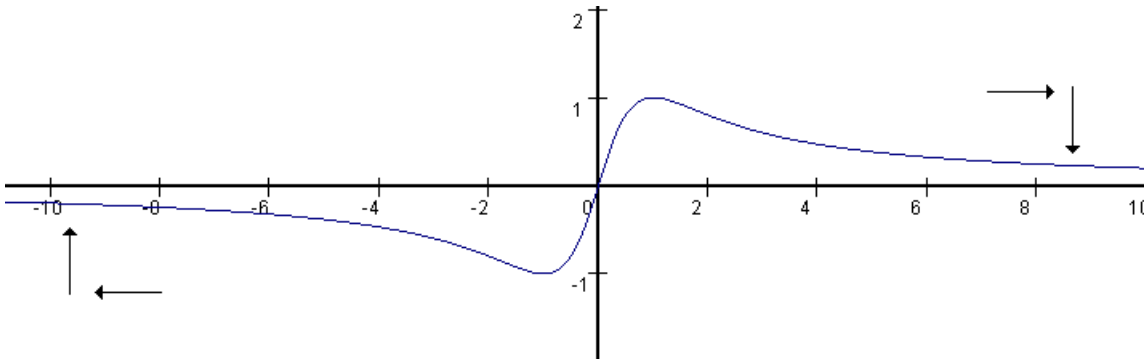
Um Probleme bei Minus Unendlich zu vermeiden, benutzen wir gleich die ausgeklammerte Form

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x+\frac{1}{x}} = \frac{2}{-\infty+\frac{1}{-\infty}} = \frac{2}{-\infty+0} = \frac{2}{-\infty} = 0^-$$

Das Ergebnis dieser beiden Berechnungen schreiben wir noch mal ordentlich auf, damit wir die Information beim Zeichnen besser verwenden können

$$x \to +\infty \quad y \to 0^+ \qquad \textit{und} \qquad x \to -\infty \quad y \to 0^-$$

Man spricht: x gegen plus Unendlich, dann geht y gegen Null von der positiven Seite (oben) und x gegen minus Unendlich, dann geht y auch gegen 0, aber von der negativen Seiten (unten)



Die Pfeile sollen noch mal deutlich das Verhalten der Funktion für betragsgroße x darstellen. Je größer die x-Werte in beide Richtungen (plus und minus unendlich) werden, desto näher kommt die Funktion der x-Achse, also die y-Werte der Funktion gehen gegen Null.