6.6. Wendepunkte

Wendepunkte sind meist zwischen 2 Extrempunkten angesiedelt. Sie werden begrifflich meist mit Extrempunkten verwechselt, weil viele denken, dass sich hinter Wendepunkten Hochbzw. Tiefpunkte verbergen, weil die Funktion dort wendet (Vorsicht Falle).

Vorgehensweise zur Berechnung von Wendepunkten:

- 1. f(x) drei mal ableiten, d.h. f'(x) und f''(x) und f'''(x) bilden
- 2. potentielle Wendestellen mit dem Ansatz f''(x) = 0 bestimmen.

Vereinfacht gesagt heißt das: Setze die zweite Ableitung gleich Null, löse die Gleichung mit einem Werkzeug und du erhältst die x-Werte von potentiellen Wendepunkten, also die Wendestellen. Potentiell ist wichtig, denn man weiß zu diesem Zeitpunkt noch nicht, ob es wirklich eine Wendestelle ist. Dies kann man mithilfe der dritten Ableitung bestätigen.

3. Die potentielle Wendestelle mit dem Ansatz $f'''(x) \neq 0$ bestätigen

Vereinfacht gesagt heißt das: Den x-Wert des Wendepunktes, also die Wendestelle muss man jetzt noch in die dritte Ableitung einsetzen. Kommt dabei Null heraus, war die potentielle Wendestelle doch keine Wendestelle, es war sozusagen Fehlalarm. Kommt bei der dritten Ableitung allerdings ungleich Null heraus, so wird aus der potentiellen Wendestelle eine tatsächliche Wendestelle (s.a. alternativ Vorzeichenwechsel S.194).

4. An der dritten Ableitung erkennt man noch die Art des Wendepunktes

Gilt f'''(x) < 0 so folgt daraus ein *Links-Rechts-Wendepunkt* (erst Links-, dann Rechtskrümmung) Gilt f'''(x) > 0 so folgt daraus ein *Rechts-Links-Wendepunkt* (erst Rechts-, dann Linkskrümmung)

Tipp zum merken: Links-Rechts-Wendepunkt d.h. Ungleichheitszeichen geht erst nach links und dann nach rechts

5. Zuletzt muss man noch den y-Wert des Wendepunktes berechnen.

Dies geschieht durch Einsetzen des x-Wertes in f(x). Dies kann man direkt unter Punkt 6 der Kurvendiskussion (Wendepunkte) erledigen, oder man wartet bis Punkt 7, nämlich der Wertetabelle

Besondere Wendepunkte, nämlich die Sattelpunkte:

Wendepunkte, in denen die Steigung (m) null ist, für die also zusätzlich f'(x) = 0 gilt, nennt man Sattelpunkte. *Sattelpunkte* findet man oft, wenn aus potentiellen Extremstellen keine tatsächlichen Extremstellen geworden sind. Man kann Wendepunkte hinsichtlich der Eigenschaft Sattelpunkt überprüfen, indem man den x-Wert des Wendepunktes in die erste Ableitung einsetzt. Kommt 0 heraus, folgt m = 0, so ist der Wendepunkt auch ein Sattelpunkt.

Wichtiger Hinweis: Wendepunkte sind genau so wie Extrempunkte markante Punkte der Funktion. Bei Wendepunkten ändert sich nämlich die Krümmung. Beim zeichnen von Funktionen ist es praktisch, wenn man weiß, das sich in Wendepunkten die Krümmung ändert. So kann man Fehler beim zeichnen unbewusst vermeiden.

Versuche bitte die Übungsaufgabe auf der nächsten Seite!

Übungsaufgabe zum Thema Wendepunkte:

Berechne von der Funktion $f(x) = x^3 - 6,75x^2 + 6x + 13,5$ die Wendepunkte

Zunächst werden die ersten drei Ableitungen gebildet:

$$f(x) = x^3 - 6,75x^2 + 6x + 13,5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 13,5x + 6$$

$$f''(x) = 6x - 13,5$$

$$f'''(x) = 6$$

Weiter geht's mit den Ansätzen für Wendestellen: f''(x) = 0 und $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 0$$

 $6x - 13.5 = 0 + 13.5$
 $6x = 13.5 + 6$
 $x = 2.25$
potentielle Wendestelle

Die potentielle Wendestelle muss über die 3. Ableitung bestätigt werden, indem die potentielle Wendestelle in die 3. Ableitung eingesetzt wird, wobei dann ungleich null herauskommen muss.

$$f'''(x) \neq 0$$

 $f'''(2,25) = 6 \neq 0 \Rightarrow tats \ddot{a}chliche Wendestellte$
 $f'''(2,25) = 6 \Rightarrow 0 \Rightarrow RL - Wendepunkt$

Nun muss noch der y-Wert des Wendepunktes durch Einsetzen des x-Wertes in f(x) berechnet werden

$$f(2,25) = 2,25^3 - 6,75 \cdot 2,25^2 + 6 \cdot 2,25 + 13,75 = 4,5 \implies Wendepunkt bei (2,25/4,5)$$

Anmerkung: Die Bestätigung der potentiellen Wendestelle kann auch über den Vorzeichenwechsel erfolgen. Siehe spezielles Kapitel <u>Vorzeichenwechsel</u> S.194.