6.5. Extrempunkte

Was sind denn eigentlich Extrempunkte? Wie die Bezeichnung schon sagt, ist da etwas extrem, und dieses etwas ist die Funktion oder genauer gesagt der Verlauf der Funktion. Extrempunkte sind entweder Hochpunkte oder Tiefpunkte. Mathematiker unterscheiden noch zwischen *lokale und globale Extrempunkte*. Was damit gemeint ist, will ich kurz am Beispiel des Hochpunktes erklären. Ein Hochpunkt entsteht, wenn alle Punkte in der direkten Umgebung des Hochpunktes niedriger sind als der Hochpunkt selbst. Die Funktion selber kann aber nach Durchlaufen eines Tiefpunktes wieder höher kommen, als der bisherige Hochpunkt und evtl. wird sogar ein neuer noch höherer Hochpunkt ausgebildet, was aber nicht unbedingt sein muss. Insgesamt können auf diese Weise mehrere Hochpunkte entstehen, die man alle als *lokale* Hochpunkte bezeichnet. Der höchste von allen Hochpunkten (sozusagen die höchste Bergspitze) ist allerdings zusätzlich auch *globaler* Hochpunkt.

Vorgehensweise zur Berechnung von Extrempunkten:

1. f(x) zwei mal ableiten d.h. $f'(x)$ *und* $f''(x)$ **bilden**

2. potentielle Extremstellen mit dem Ansatz $f'(x) = 0$ **bestimmen.**
Vereinfacht gesagt heißt das: Setze die erste Ableitung gleich Null, löse die Gleichung mit einem Werkzeug und du erhältst die x-Werte von potentiellen Extrempunkten, also die Extremstellen. Potentiell ist wichtig, denn man weiß zu diesem Zeitpunkt noch nicht, ob es wirklich eine Extremstelle ist. Dies kann man mithilfe der zweiten Ableitung bestätigen.

3. Die potentielle Extremstelle mit dem Ansatz $f''(x) \neq 0$ **bestätigen**
Vereinfacht gesagt heißt das: Den x-Wert des Extrempunktes, also die Extremstelle, muss man jetzt noch in die zweite Ableitung einsetzen. Kommt dabei Null heraus, war die potentielle Extremstelle doch keine Extremstelle, es war sozusagen Fehlalarm. Aus so einem Fehlalarm entstehen übrigens potentielle Sattelpunkte. Kommt bei der zweiten Ableitung allerdings ungleich Null heraus, so wird aus der potentiellen Extremstelle eine tatsächliche Extremstelle. (s.a. alternativ Vorzeichenwechsel S.194)

4. An der zweiten Ableitung erkennt man noch die Art des Extrempunktes

Gilt $f''(x) < 0$ so folgt daraus ein *Hochpunkt*
Gilt $f''(x) > 0$ so folgt daraus ein *Tiefpunkt*

5. Zuletzt muss man noch den y-Wert des Extrempunktes berechnen.
Dies geschieht durch Einsetzen des x-Wertes in f(x) . Dies kann man direkt unter Punkt 5 der Kurvendiskussion (Extrempunkte) erledigen, oder man wartet bis Punkt 7, nämlich der Wertetabelle.

Wichtiger Hinweis: Extrempunkte haben für den Verlauf der Funktion eine ganz wichtige Bedeutung. Bei Extrempunkten ändert sich nämlich die **Monotonie (Vorzeichen der Steigung).** Außerdem haben Extrempunkte die Eigenschaft, dass in ihnen die Steigung null ist. Daher gilt ja auch der Ansatz $f'(x) = 0$, denn die 1.Ableitung ist ja die Steigung.

Zum besseren Verständnis solltest du auf jeden Fall die folgende Übungsaufgabe und allgemein auch einige Kurvendiskussionen bearbeiten.

Übungsaufgabe zum Thema Extrempunkte:

Berechne von der Funktion f(x) = x³ - 6,75x² + 6x +13,5 die Extrempunkte

Zunächst werden die ersten beiden Ableitungen gebildet:

$$f(x) = x^3 - 6{,}75x^2 + 6x + 13{,}5$$
$$f'(x) = 3x^2 - 13{,}5x + 6$$
$$f''(x) = 6x - 13{,}5$$

Weiter geht's mit den Ansätzen für Extremstellen: $f'(x) = 0 \; und \; f''(x) \neq 0$

$$f'(x) = 0$$
$$3x^2 - 13{,}5x + 6 = 0 \quad \Big| pq - Formel$$
$$x_1 = 0{,}5 \quad und \quad x_2 = 4$$
$$potentielle\ Extremstellen$$

Die potentiellen Extremstellen müssen über die 2.Ableitung bestätigt werden, indem die potentiellen Extremstellen in die 2.Ableitung eingesetzt werden, wobei dann ungleich null herauskommen muss.

$$f''(x) \neq 0$$
$$f''(0{,}5) = 6 \cdot 0{,}5 - 13{,}5 = -10{,}5 < 0 \Rightarrow Hochpunkt$$
$$f''(4) = 6 \cdot 4 - 13{,}5 = 10{,}5 > 0 \Rightarrow Tiefpunkt$$

Nun müssen noch die y-Werte der Extrempunkte durch einsetzen der x-Werte in f(x) berechnet werden

$$f(0{,}5) = 0{,}5^3 - 6{,}75 \cdot 0{,}5^2 + 6 \cdot 0{,}5 + 13{,}75 = 15{,}2 \quad \Rightarrow \quad Hochpunkt\ bei\ (0{,}5 / 15{,}2)$$
$$f(4) = 4^3 - 6{,}75 * 4^2 + 6 \cdot 4 + 13{,}75 = -6{,}25 \quad \Rightarrow \quad Tiefpunkt\ bei\ (4 / -6{,}25)$$

<u>Anmerkung</u>: Die Bestätigung der potentiellen Extremstelle kann auch über den Vorzeichenwechsel erfolgen. Siehe spezielles Kapitel Vorzeichenwechsel S.194.