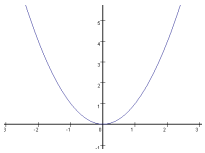
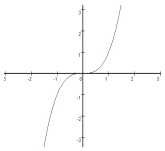
6.3. Symmetrie

Was ist denn eigentlich symmetrisch? Am besten kann man dies am Beispiel erklären.

Achsensymmetrie **Punktsymmetrie**





Betrachtet man sich die Parabel der die Funktion $f(x) = x^2$ (links), so kann man nach näherem hinschauen erkennen, dass, wenn man die Funktion an der y-Achse durchschneidet und den rechten Teil nach links rüberklappt, man wieder direkt auf der Funktion landet. Man kann auch sagen, dass man die Funktion an der y-Achse spiegeln kann. Diesen Tatbestand nennt man *achsensymmetrisch zur y-Achse*.

Betrachtet man sich aber z.B. die Funktion $f(x) = x^3$ (rechts), so kann man nach einiger Zeit erkennen, dass, wenn man den rechten Ast der Funktion um den Ursprung des Koordinatensystems, also um (0/0), um 180 Grad drehen würde, man wieder auf der Funktion landen würde. Diesen Tatbestand nennt man *punktsymmetrisch zum Ursprung (0 / 0)*.

Vorgehensweise beim Beweis von Symmetrieeigenschaften.

1. Zunächst schaut man sich die *Exponenten* der Funktion an:

   Hat die Funktion nur gerade Exponenten, so ist sie achsensymmetrisch zur y-Achse. Die Funktion darf übrigens *ein* absolutes Glied haben, da dieses ja nur eine Verschiebung nach oben bewirkt und die Achsensymmetrie daher nicht beeinträchtigt.

   Hat die Funktion nur ungerade Exponenten, so ist sie punktsymmetrisch zu (0/0). Die Funktion darf übrigens *kein* absolutes Glied haben, da eine Verschiebung nach oben zwar immer noch eine punktsymmetrische Funktion hervorbringt, allerdings ist diese Funktion dann nicht mehr punktsymmetrisch zum Ursprung. **Ergo:**

   Achsensymmetrie zur y-Achse: Nur gerade Exponenten, absolutes Glied erlaubt.
   Punktsymmetrie zum Ursprung: Nur ungerade Exponenten, kein absolutes Glied.

2. Nach dieser Vorüberlegung hat man ja eine Vermutung, welche Symmetrieart vorliegt und man kann nun gezielt mit folgenden Ansätzen die Symmetrie beweisen:

   Für Achsensymmetrie gilt: $f(x) = f(-x)$
   Für Punktsymmetrie gilt: $f(x) = -f(-x)$

3. Um die Ansätze aus Punkt 2 umzusetzen, geht man folgendermaßen vor:

   Man bildet f(-x) d.h. –x in die Funktion einsetzen, wobei man um –x Klammern setzen muss (da man was negatives einsetzt), vereinfacht und vergleicht dies gemäß obigem Ansatz für Achsensymmetrie mit f(x). Sind die beiden Funktionen identisch, so liegt Achsensymmetrie zur y-Achse vor.
   Ist dies nicht der Fall, muss man noch hinsichtlich der Punktsymmetrie untersuchen. Aus f(-x) bildet man –f(-x), indem man die Vorzeichen überall vertauscht, und vergleicht auch dies gemäß obigem Ansatz für Punktsymmetrie mit f(x). Sind die beiden Funktionen identisch, so liegt Punktsymmetrie zum Ursprung vor. Ist auch dies nicht der Fall, so ist keine Symmetrie erkennbar.

Übungen zum Thema Symmetrieeigenschaften von Funktionen

Untersuche folgende Funktionen hinsichtlich Symmetrie:

a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$ b) $f(x) = -x^3 + 5x$ c) $f(x) = x^4 + x - 1$

Lösung zu a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

Zunächst betrachtet man sich die Exponenten. Man erkennt nur gerade Exponenten. Dies ist ein klarer Hinweis auf Achsensymmetrie. Dagegen spricht auch nicht das absolute Glied (+5), denn bei Achsensymmetrie ist ja ein absolutes Glied erlaubt.

Versuchen wir nun unsere Vermutung bezüglich Achsensymmetrie zu beweisen:

Es muss gelten: $f(x) = f(-x)$

Wir bilden also f(-x) (Wichtig: –x in Klammern schreiben) und vereinfachen

$$f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$$
$$f(-x) = (-x)^4 - 3\cdot(-x)^2 + 5$$
$$f(-x) = x^4 - 3x^2 + 5$$

Wenn man jetzt f(-x) mit f(x) ganz oben vergleicht, so hat man identische Funktionen, also liegt Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

Lösung zu b) $f(x) = -x^3 + 5x$

Zunächst betrachtet man sich die Exponenten. Man erkennt nur ungerade Exponenten. Dies ist ein klarer Hinweis auf Punktsymmetrie. Es ist auch kein absolutes Glied vorhanden, was ja Punktsymmetrie zum Ursprung verhindern würde.

Versuchen wir nun, unsere Vermutung bezüglich Punktsymmetrie zu beweisen

Es muss gelten: $f(x) = -f(-x)$

Wir bilden –f(-x), indem wir zuerst f(-x) und anschließend –f(-x) bilden, indem wir überall die Vorzeichen rumdrehen

$$f(x) = -x^3 + 5x$$
$$f(-x) = -(-x)^3 + 5\cdot(-x)$$
$$f(-x) = x^3 - 5x$$
$$-f(-x) = -x^3 + 5x$$

Wenn man jetzt -f(-x) mit f(x) ganz oben vergleicht, so hat man identische Funktionen, also liegt Punktsymmetrie zum Ursprung vor.

Lösung zu c) Zeige selbständig, dass <u>*keine*</u> Symmetrie vorliegt.