Reihen

Bevor du weiter liest, solltest du wissen, was eine Folge ist. Falls du das nicht weißt, schau bitte nochmals im Kapitel Folgen S.179 nach. Eine Reihe S_n ist nämlich die Aufsummierung (Kumulation) von einer bestimmten Anzahl von Folgengliedern einer Folge a_n

Der erste Wert einer Reihe ist der erste Wert der Folge. Der zweite Wert der Reihe ist die Summe der ersten beiden Folgenglieder. Der dritte Wert der Reihe ist die Summe der ersten drei Folgenglieder usw. Für Folge und Reihe in allgemeiner Form ergibt sich dann:

Folge in allgemeiner Form: $a_n = \{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$

Reihe in allgemeiner Form: $S_n = \{S_1, S_2, S_3, \cdots\} \quad mit$
$S_1 = a_1 \quad und \quad S_2 = a_1 + a_2 \quad und \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

Hauptproblem dabei ist die Bestimmung einzelner Reihenglieder. Zur Vereinfachung gibt es dazu entsprechende Formeln, wobei es für arithmetische Reihen und geometrische Reihen unterschiedliche gibt. Arithmetische Reihen entstehen aus arithmetischen Folgen, während geometrische Reihen aus geometrischen Folgen entstehen. Wenn du nicht mehr den Unterschied zwischen arithmetisch und geometrisch wissen solltest, dann schau bitte noch mal im Kapitel „Folgen“ S.179 nach.

Arithmetische Reihe:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$$
$$S_n = n \cdot a_1 + 0{,}5 \cdot (n-1) \cdot n \cdot d$$

Geometrische Reihe:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

S_n = n - tes Reihenglied
a_1 = Erstes Folgenglied
a_n = n - tes Folgenglied
d = Abstand zwichen den Folgengliedern
q = Faktor
n = Index eines Reihen - bzw. Folgengliedes

Dazu gleich ein Beispiel: Gegeben ist die arithmetische Folge $a_n = \{1,3,5,7,\cdots\}$ mit dem Abstand d = 2 und dem ersten Folgenglied 1. Man sucht nun das dritte Reihenglied, also die Summe der ersten drei Folgenglieder. Man braucht einfach nur die ersten 3 Zahlen der Folge zusammenzuzählen und kommt so auf den Wert 9. Die 9 ist übrigens der dritte Wert der zu der Folge gehörenden Reihe. Diesen Wert erhalten wir natürlich auch durch Anwendung der obigen Formel, in die wir für n den Wert 3 einsetzen:

$$S_n = n \cdot a_1 + 0{,}5 \cdot (n-1) \cdot n \cdot d$$
$$S_3 = 3 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot (3-1) \cdot 3 \cdot 2$$
$$S_3 = 3 + 0{,}5 \cdot 2 \cdot 6 = 3 + 6 = 9$$

Wie du siehst, erhalten wir den gleichen Wert. Dies funktioniert übrigens auch mit der anderen Formel für die arithmetische Reihe. Handelt es sich um geometrische Folgen, dann benutze die geometrische Reihenformel.

© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

Im Folgenden möchte ich besonders interessante Folgen und Reihen vorstellen. Die hier erläuterten Reihenvorschriften benötigen wir z.B. für Beweise im Zusammenhang mit der Integralrechnung:

Gegeben ist die lineare Folge: $a_n = (1 + 2 + 3 + \cdots)$

Man möchte nun eine bestimmte Zahl von Folgengliedern aufsummieren, man kann also sagen, dass eigentlich ein bestimmtes Glied der entsprechenden Reihe gesucht ist. Für diese Reihe hat ein ganz schlauer Mensch eine Reihenvorschrift gefunden, mit der man nun ganz einfach die lineare Folge bis zu einem bestimmten Wert aufsummieren kann:

Diese Reihenvorschrift lautet: $S_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

Anwendungsbeispiel: Gesucht ist zu obiger linearen Reihe die Summe der ersten 3 Folgenglieder. Man setzt also in obige Formel den Wert n = 3 ein und erhält

$$S_n = \frac{3 \cdot (3+1)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad \text{Summe } (1 + 2 + 3)$$

Gegeben ist nun eine quadratische Folge: $a_n = \{1 + 4 + 9 + \cdots\} = \{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\}$

Auch hier soll wieder bis zu einem bestimmten Folgenglied aufsummiert werden, wobei man folgende Reihenvorschrift benutzen kann:

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$$

Versuchen wir auch hier wieder die ersten 3 Folgenglieder zusammenzuzählen, also n = 3

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = \frac{3 \cdot (3+1) \cdot (2 \cdot 3 + 1)}{6} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = \frac{84}{6} = 14 \quad \text{Summe } (1 + 4 + 9)$$

Gegeben ist nun eine kubische Folge: $a_n = \{1 + 8 + 27 + \cdots\} = \{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\}$

Auch hier soll wieder bis zu einem bestimmten Folgenglied aufsummiert werden, wobei man folgende Reihenvorschrift benutzen kann:

$$S_n = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

Versuchen wir auch hier wieder die ersten 3 Folgenglieder zusammenzuzählen, also n = 3

$$S_n = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} = \frac{3^2 \cdot (3+1)^2}{4} = \frac{9 \cdot 4^2}{4} = \frac{9 \cdot 16}{4} = \frac{144}{4} = 36 \quad \text{Summe } (1 + 8 + 27)$$

© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

 © Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.