5.2.9. Betragsfunktion

Aus einer Betragsfunktion entstehen abschnittsweise definierte Funktionen und deshalb solltest du zum besseren Verständnis das Kapitel „abschnittweise definierte Funktionen“ S.162 zunächst durchlesen. Schauen wir uns doch mal eine Betragsfunktion an

$$f(x) = |x - 4|$$

Wenn man diese Funktion zeichnen möchte, dann muss man die Betragsfunktion zunächst in eine abschnittsweise definierte Funktion umwandeln.

Dazu muss man zunächst die Nullstelle des Teiles innerhalb der Betragsstriche bestimmen, indem wir diesen gleich Null setzen

$$\begin{aligned} x - 4 &= 0 \quad | +4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

An der Stelle 4 existiert eine Nullstelle und diese Stelle ist wichtig, weil dort die Grenze ist, wo der Inhalt der Betragsstriche positiv oder negativ ist. Probieren wir das doch mal aus. Setzen wir die 5 für x ein, so erhalten wir fünf minus vier ist 1, also was positives. Setzen wir die 3 für x ein, so erhalten wir drei minus vier ist -1, also was negatives. Die 4 ist also die Grenze dafür, ob innerhalb der Betragstriche etwas Positives oder Negatives entsteht. Deshalb wird die 4 auch den Definitionsbereich in 2 Abschnitte, nämlich größer und kleiner als 4 aufspalten. Die 4 selber kann man zu einem beliebigen Bereich dazuzählen.

Warum war das jetzt so wichtig, ob der Ausdruck innerhalb der Betragsstriche positiv oder negativ ist. Das hängt mit der Auswirkung des Betrages auf positive bzw. negative Ausdrücke zusammen:

Der Betrag von etwas Positivem ist das Positive selbst:

$$|5| = 5 \qquad \textit{oder} \qquad |x - 4| = x - 4 \qquad \textit{für} \qquad x - 4 > 0, \text{also positiv}$$

Der Betrag von etwas Negativem ist das Negative von dem Negativen:

$$|-5| = -(-5) = 5 \qquad \textit{oder} \qquad |x - 4| = -(x - 4) = -x + 4 \qquad \textit{für} \qquad x - 4 < 0, \text{also negativ}$$

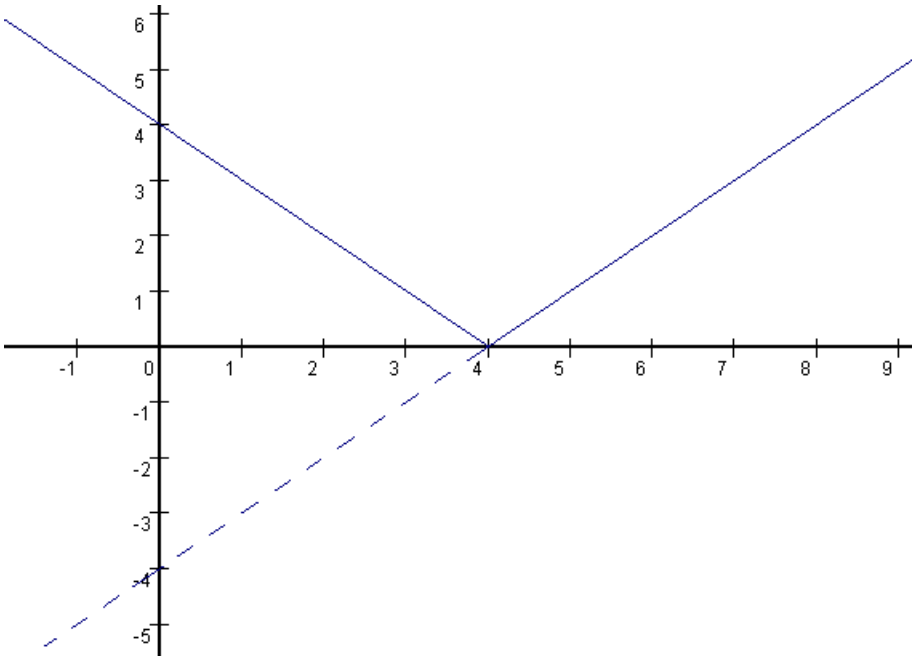
Wir merken uns also, dass wenn der Betragsinhalt positiv ist, dann können wir die Betragsstriche einfach weglassen. Ist der Betragsinhalt negativ, dann muss um den Betragsinhalt eine Klammer gesetzt werden und vor die Klammer ein Minuszeichen gesetzt werden.

Die Interpretation der Betragsstriche wirkt sich auf unsere Funktion folgendermaßen aus

$$f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{für} \quad x > 4 \\ -x + 4 & \text{für} \quad x \leq 4 \end{cases}$$

Setzt man Werte größer als 4 in die Betragsfunktion, so wird der Betragsinhalt positiv, also kann man die Betragsstriche auch weglassen. Setzt man Werte kleiner als 4 in die Betragsfunktion ein, so wird der Betragsinhalt negativ und wir müssen um diesen eine Klammer setzen und vor die Klammer ein Minuszeichen. Durch Auflösen der Klammer erhalten wir obigen unteren Ausdruck.

Wie sieht nun der Graph dieser Betragsfunktion aus?



Die gestrichelte Linie gehört nicht mehr zum Graphen der Betragsfunktion, sie erklärt allerdings, wie die Betragsfunktion entsteht. Die Fortsetzung der gestrichelten Linie ist nämlich die lineare Funktion x-4, also der Inhalt der Betragsstriche. Die Betragsfunktion spiegelt nun diese lineare Funktion an der x-Achse, aber nur in den Bereichen, in denen die lineare Funktion im Negativen verläuft.

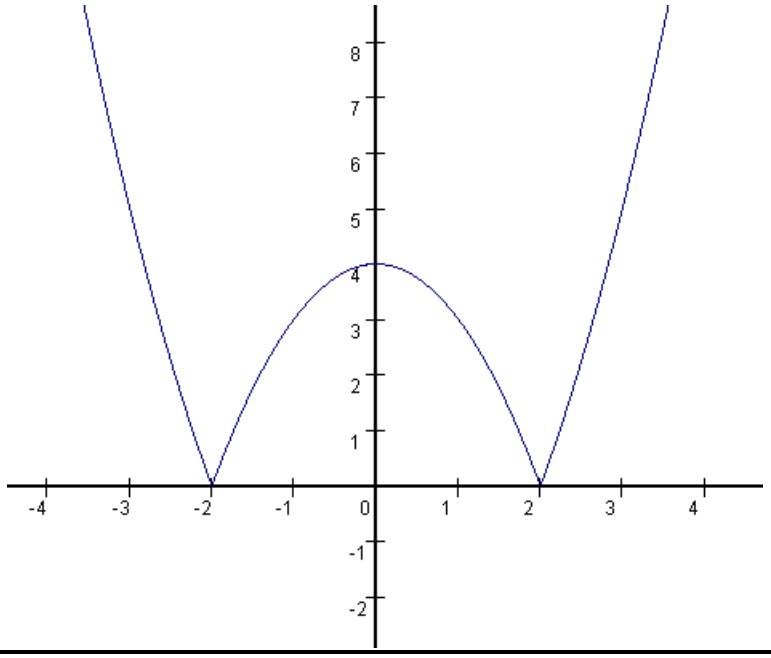
Versuche doch mal die folgende Betragsfunktion in eine abschnittsweise definierte Funktion umzuwandeln und anschließend zu zeichnen.

$$f(x) = \left| x^2 - 4 \right|$$

Kleiner Tipp: Bestimme die Nullstellen und denke daran, wie sich der Betrag auf den Betragsinhalt auswirkt. **Auf der folgenden Seite findest du die Lösung.**

Lösung: $$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{für} \quad x<-2 \\ -x^2+4 & \text{für} \quad -2\le x\le 2 \\ x^2-4 & \text{für} \quad x>2 \end{cases}$$

Diese Funktion kann man noch vereinfachen, da für 2 Intervalle die gleiche Funktion gilt

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4 & \text{für} \quad x<-2 \quad \text{und} \quad x>2 \\ -x^2+4 & \text{für} \quad -2\le x\le 2 \end{cases}$$

Graphisch erhalten wir folgendes Koordinatensystem, welches man sich wieder so erklären kann, dass die Funktion x² - 4, also eine um 4 nach unten verschobene Normalparabel, im negativen Bereich, also unterhalb der x-Achse, an der x-Achse gespiegelt wurde.