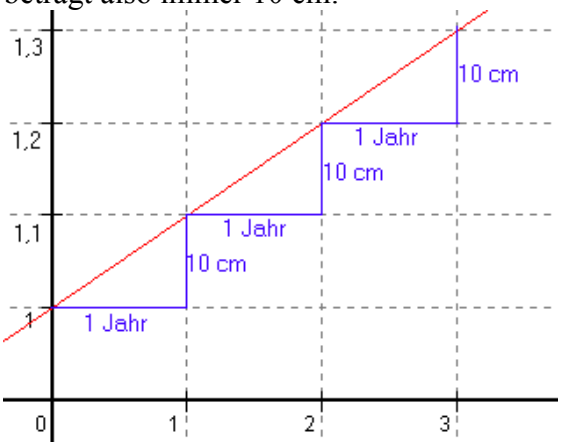
5.2.4.1. Wachstum

Dieses Kapitel ist eines der wenigen Kapitel in der Mathematik mit hohem Praxisbezug. Unter Wachstum oder auch Wachstumsprozessen versteht man eigentlich, dass irgendetwas immer mehr wird. In diesem Kapitel wirst du sehen, dass es auch negatives Wachstum gibt, man spricht dann von Verminderung oder auch Schrumpfungsprozessen.

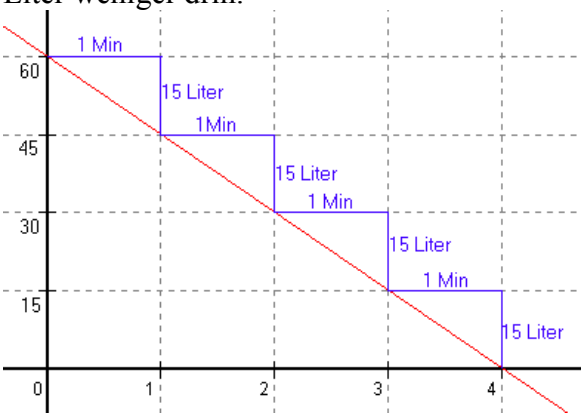
Grundsätzlich kann man 2 Arten von Wachstum unterscheiden:
Zum einen **Lineares Wachstum** (diese Seite) und zum anderen **Exponentielles Wachstum** (nächste Seite). Es ist wichtig den Unterschied genau herauszuarbeiten.

Beim **Linearen Wachstum** vergeht eine Zeitperiode und in dieser Zeitperiode findet irgendeine Veränderung (Wachstum oder Verminderung) statt. Anschließend vergeht die nächste Zeitperiode, die genauso lang wie die erste Zeitperiode ist, und es passiert wieder genau die gleiche Veränderung. Dazu zwei Beispiele

Ein Baum wächst pro Jahr 10 cm. Das bedeutet, wenn ein Jahr vergeht dann ist er um 10 cm gewachsen. Vergeht wiederum ein Jahr, dann ist er wieder um 10 cm gewachsen. Die Veränderung ist konstant, beträgt also immer 10 cm.



Aus einer Badewanne laufen pro Minute 15 Liter Wasser heraus. Das bedeutet, dass eine Minute vergeht, und aus der Wanne sind 15 Liter herausgelaufen. Vergeht eine weitere Minute, dann sind wiederum 15 Liter weniger drin.



An den beiden Koordinatensystemen kann man nun die Funktionsweise von linearen Veränderungen erkennen. Eine bestimmte Zeitperiode vergeht und in dieser Zeitperiode geschieht eine bestimmte Veränderung. Diese Veränderung ist in jeder Zeitperiode gleich.

Wenn du jetzt vielleicht mal versuchst, dich an das Kapitel Funktionen zu erinnern und dann fällt dir vielleicht ein Funktionstyp ein, der obigen Funktionsverlauf am besten darstellt. Beides sind ja Geraden und Geraden werden durch den Funktionstyp der Linearen Funktion dargestellt. Deren allgemeine Form lautet y = mx + b. Für Lineare Wachstumsprozesse muss die Formel noch ein klein wenig verändert werden:

$$y = m \cdot \tfrac{1}{c} \cdot x + b$$

mit

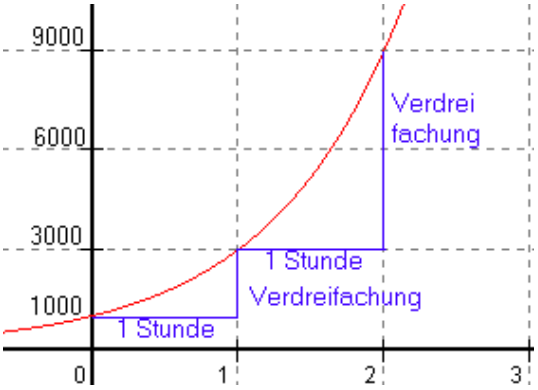
m = Lineare Veränderung (Steigung)
b = Startwert (Achsenabschnitt)
c = Dauer einer Zeitperiode
x = unabhängige Variable
$y = abhängigeVariable$

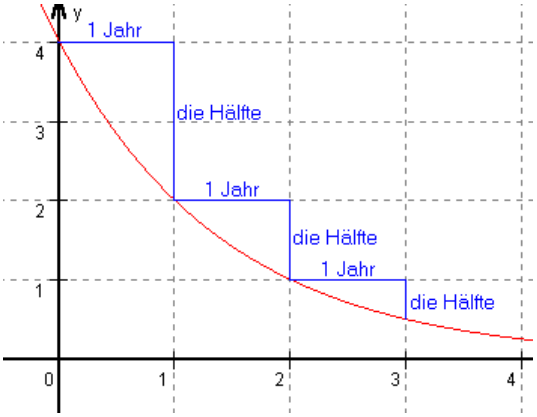
© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

Als nächstes muss nun der Unterschied von linearem und exponentiellem Wachstum geklärt werden. Dazu zwei Beispiele für exponentielles Wachstum:

Eine Bakterienkultur verdreifacht sich in einer Stunde. Das bedeutet, dass nach einer Stunde 3 mal so viele Bakterien da sind wie vorher. Vergeht wieder eine Stunde, dann sind wieder 3-mal so viele da wie vorher. Im Gegensatz zu linearem Wachstum sind hier die Veränderungen nicht immer gleich, wie man an folgendem Koordinatensystem erkennen kann. Nach einer Stunde sind aus 1000 Bakterien 3000 geworden, also ein Wachstum um 2000 Bakterien. Vergeht nochmals eine Stunde, dann sind aus 3000 Bakterien wegen der Verdreifachung 9000 Bakterien geworden, also eine Veränderung um 6000 Bakterien. Die Veränderung steigt in diesem Fall exponential.

Ein weiteres Beispiel sind radioaktive Stoffe, die aufgrund ihrer Radioaktivität ständig weniger werden. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Halbwertszeit. Hat ein radioaktiver Stoff z.B. eine Halbwertszeit von 1 Jahr, dann ist nach Ablauf eines Jahres nur noch die Hälfte des Stoffes da. Vergeht wiederum ein Jahr, dann ist nur noch die Hälfte des noch vor einem Jahr da gewesenen Stoffes vorhanden. Auch hier ist die Veränderung im Gegensatz zu linearen Veränderungen nicht immer die gleiche. Schau in der Skizze





Kommt dir der Funktionsverlauf der beiden Funktionen irgendwie bekannt vor. Du kennst ihn vielleicht noch von der Exponentialfunktion $y = q^x$. Auch diese Funktion müssen wir ein klein wenig verändern:

$$y = b \cdot q^{\frac{1}{c} \cdot x}$$

mit

q = Exponentielle Veränderung
b = Startwert (Achsenabschnitt)
c = Dauer einer Zeitperiode
x = unabhängige Variable
y = *abhängigeVariable*

© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

Vorgehensweise bei Textaufgaben zum Thema Wachstum

1. **Zunächst muss man entscheiden, ob es ein linearer oder exponentieller Wachstumsprozess ist. Dabei helfen folgende Ausführungen:**
Vergeht eine Zeitperiode, und in dieser Zeitperiode findet eine Veränderung statt, die immer gleich groß (konstant) ist, dann ist das ein Hinweis auf lineare Veränderung. Ändern sich die Veränderungsraten, dann handelt es sich um exponentielle Veränderungen.
Liegt der Veränderung also eine Strichrechnung (Plus 10 cm oder Minus 15 Liter) zugrunde, dann ist das wieder ein Hinweis auf lineares Wachstum. Liegt der Veränderung eine Punktrechnung zugrunde (Mal 3 bei Verdreifachung oder Geteilt durch 2 bei Halbierung), dann ist das wieder ein Hinweis auf exponentielles Wachstum

2. Wenn man sich also über den Wachstumsprozess im Klaren ist, dann muss man die **Variablen definieren**. Sie müssen bestimmen, was die unabhängige Variable x und was die abhängige Variable y darstellen soll. Überlege, was wovon abhängt. Die Zeit ist meist die unabhängige Variable, also x.

3. Nun muss man die **Funktionsgleichung aufstellen.** Schreibe diese bitte zunächst in allgemeiner Form auf, und überlege, welche Werte wo einzusetzen sind. Beim Aufstellen der Funktionsgleichung werden für x und y keine Werte eingesetzt. Der Startwert b und die Zeitperiode c, in der die lineare oder exponentielle Veränderung stattfindet, sind normalerweise leicht zu bestimmen. Problematischer ist es schon mit den Werten für die Veränderung:
Beim linearen Wachstum ist der Wert für die lineare Veränderung m positiv, wenn es sich um einen Wachstumsprozess (Baum) handelt. Handelt es sich um einen Verminderungsprozess (Badewanne), dann ist m negativ. Das ist auch nachvollziehbar, wenn man sich noch mal klarmacht, dass m ja die Steigung ist.
Beim exponentiellen Wachstum ist der Wert für die exponentielle Veränderung q größer als 1, wenn es sich um einen Wachstumsprozess (Bakterien) handelt. Handelt es sich um einen Verminderungsprozess (Halbwertszeit bei radioaktiven Stoffen), dann ist q kleiner als 1, aber größer als Null. Besonders vorsichtig muss man sein, wenn es sich um **prozentuale Veränderungen** um p Prozent handelt. Dies ist meist bei Verzinsung von Kapital aufgrund des Zinseszins-Effekts anzuwenden. Der Wert für q beträgt dann:

$q = 1 + \frac{p}{100}$ bei prozentualem Wachstum

$q = 1 - \frac{p}{100}$ bei prozentualer Verminderung

Soll ein Kapital z.B. jährlich um 8 % wachsen, ergibt sich für q ein Wert von 1,08.

4. Wenn die Funktionsgleichung steht, dann kann man mit der Funktionsgleichung arbeiten. Durch Einsetzen eines Wertes für die unabhängige Variable x kann man den zugehörigen y-Wert der abhängigen Variable berechnen. Umgekehrt kann es aber auch sein, dass man den Wert für y kennt und den x-Wert berechnen muss.
Superwichtig: Achte beim Einsetzen von Zahlen für x darauf, dass x die gleiche Einheit wie c hat.

© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

Versuche doch mal die 4 Funktionsgleichungen der folgenden Beispiele aufzustellen. Schau dir bitte vorher nochmals die beiden Formeln für die unterschiedlichen Wachstumsprozesse an, insbesondere auch die Bedeutung der Variablen in den Formeln

1. Ein Baum ist 3,5 m groß und wächst in 2 Jahren jeweils um 25 cm
2. In einer Badewanne sind 200 Liter Wasser. In 5 Minuten laufen 40 Liter heraus.
3. Eine Bakterienkultur besteht aus 30000 Bakterien. Alle 20 Minuten verdoppelt sich die Bakterienanzahl.
4. Ein radioaktiver Stoff hat eine Halbwertszeit von 5 Wochen. Von diesem Stoff liegt vor Ihnen ein 40 kg schwerer Brocken.

Lösungen:

Zu 1: Beachte hier die unterschiedlichen Einheiten bei der Baumgröße und der linearen Veränderung $y = 0{,}25 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + 3{,}5 = 0{,}125x + 3{,}5$

Zu 2: Beachte hier bitte, dass m negativ ist, da wir einen Verminderungsprozess als Funktion darstellen $y = -40 \cdot \frac{1}{5} \cdot x + 200 = -8x + 200$

Zu 3: Hier braucht man eigentlich nur die Daten in die entsprechende Formel einsetzen

$$y = 30000 \cdot 2^{\frac{1}{20} \cdot x} = 30000 \cdot 2^{0{,}05x}$$

Zu 4: Beachte, dass q aufgrund der Halbierung den Wer ½ bzw. 0,5 hat

$$y = 40 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{5} \cdot x} = 40 \cdot 0{,}5^{0{,}2x}$$

Zusatzfragen zur Gleichung aus Aufgabe Nummer 4

a) Wie schwer ist der Block nach 5 Monaten?
b) Wie lange dauert es, bis von dem Block 10 kg übrig ist?
c) Bestimme die durchschnittliche Veränderungsrate!

Zu Frage a) Setze für x den entsprechenden Wert ein, beachte aber, dass du Monate erst in Wochen umrechnen musst, da die Zeitperiode c in Wochen angegeben ist. Du müsstest dann den Wert y = 2,5 kg erhalten.
Zu Frage b) Jetzt ist der y-Wert bekannt (10 kg) und wir müssen den x-Wert bestimmen. Das ist nicht so einfach, da man mit dem Logarithmus arbeiten muss:

$$y = 40 \cdot 0{,}5^{0{,}2x} \quad \Rightarrow \quad 10 = 40 \cdot 0{,}5^{0{,}2x} \quad \Big| : 40$$

$$0{,}25 = 0{,}5^{0{,}2x} \quad \Big| \ln$$

$$\ln 0{,}25 = \ln 0{,}5^{0{,}2x} \quad \Big| \text{Exponent vorziehen}$$

$$\ln 0{,}25 = 0{,}2x \cdot \ln 0{,}5 \quad \Big| : \ln 0{,}5 \text{ und Seiten vertauschen}$$

$$0{,}2x = \frac{\ln 0{,}25}{\ln 0{,}5} = 2 \quad \Big| : 0{,}2$$

$$x = 10 \ \ \textit{Wochen}$$

© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.

Zu Frage c) Bei Wachstumsprozessen ist oft auch nach der durchschnittlichen Veränderungsrate gefragt. Das ist nichts anderes als die Steigung m zwischen 2 Punkten.
Vorgehensweise:

Bestimme die Koordinaten (x / y) der beiden Punkte und setze diese in die folgende Formel ein, wobei der Index 1 bzw. 2 jeweils die x und y-Koordinaten des ersten bzw. des zweiten Punktes bedeutet:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$ ergibt die durchschnittliche Veränderungsrate

© Copyright 2004 Udo Baumung. Alle Rechte vorbehalten.