5.2.1.2. Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen tauchen in unterschiedlichen Formen auf, grafisch allerdings sind sie immer Parabeln, die teilweise mit einer Parabelschablone gezeichnet werden können, nämlich dann, wenn es sich um die so genannte Normalparabel (a = 1) handelt. **Tipps zum Zeichnen siehe nächste Seite.**

Quadratische Funktionen können auftauchen in:

a) ***Normalform*** (quadratisches, lineares und absolutes Glied) :

$y = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ $y = 2x^2 + 5x - 9$

Ist a > 1, so handelt es sich um eine gestreckte Parabel (enger als Normalparabel)
Ist a = 1, so handelt es sich um die Normalparabel (Schablone)
Ist a < 1, so handelt es sich um eine gestauchte Parabel (breiter als Normalparabel)

Ist a positiv, so ist die Parabel oben offen und der Scheitelpunkt ist ein Tiefpunkt
Ist a negativ, so ist die Parabel unten offen und der Scheitelpunkt ist ein Hochpunkt

b) ***Scheitelpunkt-Form*** (Normalform mittels Quadratischer Ergänzung S.131 umwandeln)

$y = a \cdot (x + b) + c$ $\qquad$ $y = -4 \cdot (x - 2) + 3$

Ist a > 1, so handelt es sich um eine gestreckte Parabel (enger als Normalparabel).
Ist a = 1, so handelt es sich um die Normalparabel (Schablone).
Ist a < 1, so handelt es sich um eine gestauchte Parabel (breiter als Normalparabel).

Ist a positiv, so ist die Parabel oben offen und der Scheitelpunkt ist ein Tiefpunkt.
Ist a negativ, so ist die Parabel unten offen und der Scheitelpunkt ist ein Hochpunkt.

Ist b positiv, so ist die Parabel um b nach links verschoben.
Ist b negativ, so ist die Parabel um b nach rechts verschoben.

Ist c positiv, so ist die Parabel um c nach oben verschoben.
Ist c negativ, so ist die Parabel um c nach unten verschoben.

Der Scheitelpunkt liegt übrigens bei (-b / c). Im Beispiel bei (2/3).

c) ***Nullstellenform***:

Jede quadratische Funktion besteht aus 2 Linearfaktoren, an denen man die Nullstellen ablesen kann. Multipliziert man die beiden Linearfaktoren aus, so erhält man die Normalform.

$y = a \cdot (x + n_1) \cdot (x + n_2)$ $\qquad$ $y = 5 \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$

Zur Bestimmung der Nullstellen muss man die Vorzeichen der Linearfaktoren umdrehen. Dann ergeben sich im Beispiel folgende Nullstellen:

Nullstelle 1: (-2 / 0) und Nullstelle 2: (3 / 0)

Quadratischen Funktionen einzeichnen

Wir gehen von dem wahrscheinlichsten Fall aus, nämlich dass die quadratische Funktion in Normalform ($y = ax^2 + bx + c$) gegeben ist. Ziel ist bei jeder der unten beschriebenen Möglichkeit die Bestimmung markanter Punkte der Funktion, nämlich die Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse) und der Scheitelpunkt (Hochpunkt oder Tiefpunkt).

Wichtiger Hinweis: Hat man den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion, so kann man die Parabelschablone oder das Grundschema (vom Scheitelpunkt 1 nach rechts bzw. links und 1 nach oben, dann wieder vom Scheitelpunkt aus 2 nach rechts bzw. links und 4 (2 hoch 2) nach oben) zum Zeichnen benutzen, aber nur, wenn es sich um die *Normalparabel* handelt. Dies erkennt man daran, dass a = 1 oder a = -1 ist, wie in folgenden Beispielen.

$y = x^2 + 5x - 2$ oder $y = -x^2 + 2x - 4$ aber <u>nicht</u> bei $y = 2x^2 + 3x - 7$

Anmerkung: Bevor man eine der unten genannten Möglichkeiten in Betracht zieht, sollte man überlegen, ob man nicht ganz leicht die Funktion einzeichnen kann. Zum Beispiel:

$y = x^2 + 2$ ist eine Normalparabel, die um 2 nach oben verschoben ist

Falls dies nicht funktioniert empfehle ich Möglichkeit #1 anzuwenden !!!

Möglichkeit 1:

1. Mit dem Ansatz $f(x) = 0$ und anschließende Anwendung der pq-Formel werden die Nullstellen (Schnittpunkte mit der x-Achse) bestimmt.
2. Den x-Wert des Scheitelpunktes erhält man, indem man die Mitte der beiden Nullstellen bestimmt z.B. Nullstellen bei $x = 4$ und $x = -2$ daraus folgt, dass der x-Wert des Scheitelpunktes bei $x = 1$ ist.
3. Den y-Wert des Scheitelpunktes erhält man, indem man den x-Wert des Scheitelpunktes in f(x) einsetzt.
4. Mithilfe der Nullstellen und dem Scheitelpunkt kann man nun die Parabel zeichnen.

Möglichkeit 2:

1. Mit dem Ansatz $f(x) = 0$ und anschließende Anwendung der pq-Formel werden die Nullstellen bestimmt.
2. Mit Hilfe der Quadratischen Ergänzung (siehe auch übernächste Seite) wird die quadratische Funktion von Normalform in Scheitelpunkt-Form umgewandelt, in der man den Scheitelpunkt ablesen kann.
3. Mithilfe der Nullstellen und dem Scheitelpunkt kann man nun die Parabel zeichnen.

Möglichkeit 3:

1. Wer schon die Kurvendiskussion beherrscht, kann auch den Scheitelpunkt, der ja entweder Tiefpunkt oder Hochpunkt (also Extrempunkt) ist, über die 1.Ableitung von f(x) bestimmen. Näheres dazu findet man unter Extrempunkte S.190.
2. Anschließend noch die Nullstellen mit dem Ansatz $f(x) = 0$ bestimmen.
3. Mithilfe der Nullstellen und dem Scheitelpunkt kann man nun die Parabel zeichnen.

Quadratische Funktionen aufstellen

Im vorigen Kapitel haben wir gelernt, wie man eine gegebene quadratische Funktion in ein Koordinatensystem einzeichnet. Jetzt lernen wir den umgekehrten Weg, nämlich, wie man aus einer im Koordinatensystem eingezeichneten Parabel bzw. aus gegebenen Daten die Funktionsgleichung f(x) bestimmen kann.

Vorgehensweise:

1. Falls eine Skizze vorhanden ist, muss man daraus den Scheitelpunkt und einen beliebigen weiteren Punkt bestimmen. Diese Punkte sind evtl. in der Aufgabe auch schon gegeben.
2. Die Koordinaten des Scheitelpunktes (-b/c) und die Koordinaten des Punktes (x/y) werden in die Scheitelpunkt-Form $y = a \cdot (x+b)^2 + c$ eingegeben. Dabei ist zu beachten, dass das Vorzeichen des x-Wertes vom Scheitelpunkt umgedreht werden muss.
3. Nun erhält man eine Gleichung, in der nur noch a unbekannt ist und nach dieser Variable löst man dann auf. Dabei ist einer der häufigsten Fehler das Nichtbeachten von „Punktrechnung vor Strichrechnung“.
4. In die Scheitelpunkt-Form $y = a \cdot (x+b)^2 + c$ werden die Werte für a, b und c eingetragen.
5. Falls verlangt, wird die Scheitelpunktform durch Ausmultiplizieren in die Normalform einer quadratischen Funktion umgeformt: $y = ax^2 + bx + c$. Dazu noch eine Anmerkung: Die Variablen b und c haben in den beiden unterschiedlichen Darstellungsformen einer quadratischen Gleichung (Scheitelpunkt- und Normalform) unterschiedliche Bedeutung und auch unterschiedliche Werte. Nur der Buchstabe a hat identische Werte und kann auch gleich interpretiert werden.

Beispiel: Von einer quadratischen Gleichung sind bekannt, dass sie bei (4/6) einen Scheitelpunkt hat und dass (2/8) ein Punkt der Funktion ist. Stelle die Funktionsgleichung der Parabel auf.

Scheitelpunkt und ein weiterer Punkt sind gegeben. Daraus ergeben sich folgende Daten:

x = 2 y = 8 c = 6 und b = -4 (nicht vergessen Vorzeichen rumdrehen)

Diese Daten werden in die Scheitelpunktform eingesetzt und dann nach der verbliebenen Variablen a aufgelöst

$$y = a \cdot (x+b)^2 + c$$
$$8 = a \cdot (2-4)^2 + 6$$
$$8 = 4 \cdot a + 6 \quad \Big| -6$$
$$2 = 4 \cdot a \quad \Big| :4$$
$$a = 0{,}5$$

Jetzt werden die Daten a, b und c in die Scheitelpunkt-Form eingesetzt und man erhält:

$y = 0{,}5 \cdot (x-4)^2 + 6$ Evtl. Normalform durch Ausmultiplizieren bilden, dabei als erstes den Binom auflösen.

Quadratische Ergänzung

Die Quadratische Ergänzung benötigt man, um eine quadratische Funktion von Normalform in Scheitelpunkt-Form umzuwandeln

$y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad y = a * (x + b) + c$

Vorgehensweise:

1. Ist a ungleich 1, muss man a entweder ausklammern oder durch a dividieren (Bsp.:2).
2. Quadratische Ergänzung (QE) berechnen: Den Faktor, der beim x steht, halbieren und quadrieren
3. Diese Zahl (QE) wird hinter dem x addiert und subtrahiert (insgesamt neutral).
4. Die ersten 3 Teile ergeben dann einen Binom (erster oder zweiter Binom).

5.a) Hat man unter 1 a ausgeklammert, muss man jetzt noch die Klammer ausmultiplizieren.
5.b) Hat man unter 1 durch a dividiert, muss man jetzt mit a multiplizieren.

1. Beispiel: $y = x^2 - 6x - 10$ Bitte in Scheitelpunkt-Form umwandeln

1. entfällt, da a = 1 ist
2. Quadratische Ergänzung berechnen: Beim x ist eine 6. Die soll halbiert und dann quadriert werden. Die Quadratische Ergänzung ist also 9.
3. Diese 9 soll hinter dem x addiert und subtrahiert werden:

$y = x^2 - 6x + 9 - 9 - 10$ jetzt den Binom anwenden

$y = (x - 3)^2 - 19$ Voila !!! Scheitelpunkt bei (3/-19)

2. Beispiel: In diesem Fall ist Punkt 1 von Bedeutung, da a ungleich 1 ist, nämlich 2. Wir entscheiden uns links für die Version a ausklammern und rechts für die Version durch a zu dividieren und am Schluss mit a zu multiplizieren. Quadratische Ergänzung ist hier übrigens 1.

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6$$
$$f(x) = 2 \cdot (x^2 + 2x - 3)$$
$$f(x) = 2 \cdot (x^2 + 2x + 1 - 1 - 3)$$
$$f(x) = 2 \cdot \left[(x+1)^2 - 4\right]$$
$$f(x) = 2 \cdot (x+1)^2 - 8$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \quad / :2$$
$$\frac{f(x)}{2} = x^2 + 2x - 3 \quad / \quad QE$$
$$\frac{f(x)}{2} = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \quad / \, Binom$$
$$\frac{f(x}{2} = (x+1)^2 - 4 \quad / \cdot 2$$
$$f(x) = 2 \cdot (x+1)^2 - 8$$

Wie man sieht, kommt bei beiden Versionen das gleiche Ergebnis heraus. So muss es ja auch sein. Etwas gewöhnungsbedürftig ist links das Ausmultiplizieren der eckigen Klammer beim letzten Schritt. Rechts ist ungewöhnlich, dass links f(x) durch a dividiert auftaucht.

Aufgaben zum Thema quadratische Funktionen:

1. Aufgabe: Welche Aussage kannst du über folgende Funktionen machen?

a) $y = -2x^2 + 6x - 3$ b) $y = -(x + 2)^2 - 3$ c) $(x + 2) * (x-12)$

2. Aufgabe: Wandle folgende Funktionen in Normalform um

a) $y = (x - 2) * (x - 5)$ b) $y = -2 * (x - 4)(x + 6)$

3. Aufgabe: Wandle folgende Funktionen in Normalform um

a) $y = (x + 3)^2 + 5$ b) $y = -(x - 4)^2 - 6$

4. Aufgabe: Wandle folgende Funktionen in Scheitelpunkt-Form und bestimme SP.
a) $y = x^2 + 2x - 8$ b) $y = 3x^2 - 12x - 15$

5. Aufgabe: Bestimme bei den Funktionen aus Aufgabe Nummer 4 die Nullstellenform

6. Aufgabe: Zeichne folgende Funktionen in ein Koordinatensystem

a) $y = x^2 - 2$ b) $y = x^2 + 3x - 10$ c) $y = 2x^2 - 12x + 18$

7. Aufgabe: Von einer quadratischen Funktion ist bekannt, dass sie bei (2/1) einen Scheitelpunkt hat. Außerdem weiß man, dass (0/4) ein Punkt der Funktion ist. Stelle die Funktionsgleichung in Normalform auf !!!

Lösungshinweise:

Aufgabe 1: Überlege, welche Bedeutungen die Zahlen haben
Aufgabe 2: Einfach ausmultiplizieren
Aufgabe 3: Binom auflösen
Aufgabe 4 bis 6: Hinweise auf den vorigen Seiten beachten, ab Seite 128.
Aufgabe 7: Scheitelpunkt-Form

Lösungen:

1.a) unten geöffnete gestreckte Parabel, die die y-Achse bei -3 schneidet.
b) unten geöffnete Normalparabel, die um 2 nach links und 3 nach unten verschoben ist.
c) Normalparabel mit Nullstellen bei -2 und +12

2.a) $x^2 - 7x + 10$ und b) $-2x^2 - 4x + 48$

3.a) $x^2 + 6x + 14$ und b) $-x^2 + 8x - 22$

4.a) $(x+1)^2 - 9$ => SP (-1 / -9) und b) $3 \cdot (x-2)^2 - 27$ => SP (2 / -27)

5.a) $(x-2) \cdot (x+4)$ und b) $3 \cdot (x-5) \cdot (x+1)$

6. keine Musterlösung

7. $y = a \cdot (x+b)^2 + c$ => $4 = a \cdot (0-2)^2 + 1$ => $a = \frac{3}{4}$ => $y = \frac{3}{4} \cdot (x-2)^2 + 1$

➔ $\frac{3}{4}x^2 - 3x + 4$