3.2.7. Cramer'sche Regel

Diese Regel ist die Hauptanwendung der Determinantenrechnung. Beides kombiniert ermöglicht das Lösen von Linearen Gleichungssystemen auf elegante Weise.

Schauen wir uns doch mal ein Beispiel an, das wir schon im Kapitel „Lineare Gleichungssysteme" gesehen haben. Wenn du das Beispiel durchrechnen willst, musst du zuerst das Kapitel Determinantenrechnung S.75 durchlesen.

Gegeben ist ein Lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Variablen:

$$\left|\begin{array}{r} 3x+2y-z=-2 \\ -x+3y+4z=19 \\ -y+2z=4 \end{array}\right|$$

Das Gleichungssystem wird als Matrix A dargestellt, wobei die erste Spalte die Faktoren der Variable x darstellt, die zweite Spalte die Variable y, die dritte die Variable z und die rechte Spalte die rechte Seite vom Gleichheitszeichen:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 & 19 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun die letzte Spalte weglassen erhalten wir die Matrix A mit dem Index 0:

$$A_0=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wenn wir von dieser Matrix die Determinante berechnen, können wir das Ergebnis folgendermaßen interpretieren:

$\det A_0 = 0 \quad \Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar

$\det A_0 \neq 0 \quad \Rightarrow$ Lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar

Eindeutig lösbar bedeutet, dass es genau eine Lösung des Gleichungssystem gibt, während nicht eindeutig lösbar bedeutet, dass es entweder keine oder unendlich viele Lösungen gibt.

Berechne doch mal obige Determinante. Du müsstest einen Wert ungleich Null erhalten, denn obiges Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.
Obige Determinante wird übrigens im Kapitel Determinantenrechnung S.76 gelöst.

Jetzt bilden wir noch 3 weitere Matrizen, wobei man jeweils eine Spalte durch die letzte Spalte (rechte Seite) ersetzt. Bei der Matrix A mit dem Index 1 wurde die erste Spalte (x) durch die letzte Spalte (rechte Seite) ersetzt. Bei der Matrix A mit dem Index 2 wurde die zweite Spalte (y) durch die letzte Spalte (rechte Seite) ersetzt. Die dritte Matrix A mit dem Index 3 erhalten wir analog, indem wir die dritte Spalte (z) durch die letzte Spalte (rechte Seite) ersetzen. Wir erhalten dann folgende Matrizen.

$$A_x = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 19 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_y = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 19 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_z = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 19 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Von diesen Matrizen kann man nun jeweils die Determinanten S.75 bestimmen. Wir erhalten also jeweils einen Wert für $\det A_x, \det A_y \, und \det A_z$

Die Lösungen für das Lineare Gleichungssystem erhalten wir dann durch berechnen folgender Ausdrücke:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A_0} \quad und \quad y = \frac{\det A_y}{\det A_0} \quad und \quad z = \frac{\det A_z}{\det A_0}$$

Anmerkung: Auf der vorigen Seite haben wir festgestellt, dass ein Lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, wenn gilt: $\det A_0 \neq 0$. Ist diese Determinante allerdings = 0, so hat das Lineare Gleichungssystem Folgendes als Lösung:

Keine Lösung, wenn **eine** der anderen Determinanten **ungleich 0** ist
Unendlich viele Lösungen, wenn **alle** anderen Determinanten **gleich 0** sind

Versuche doch mal die Lösung für x, y und z zu bestimmen. Wenn alles klappt, dann erhältst du Folgendes als Lösung:

x = -1
y = 2
z = 3