3.6. Determinantenrechnung

An das Berechnungsschema der Determinantenrechnung muss man sich etwas gewöhnen. Hat man das gepackt, dann ist die Determinantenrechnung ein praktisches Instrument. Durch Hinzunahme der Cramer'schen Regel S.64 kann man Lineare Gleichungssysteme lösen. Weitere praktische Anwendungen ergeben sich in der Vektorrechnung.

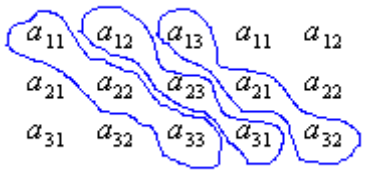
Eine Determinante wird von einer Matrix berechnet. Schauen wir uns die allgemeine Berechnung an einer 3x3 Matrix (3 Zeilen und 3 Spalten) an. Eine 3 kreuz 3 Matrix A hat folgende allgemeine Form, wobei in der Klammer die einzelnen Komponenten stehen. Die Komponente a mit dem Index 3 und 1 steht in der dritten Zeile und der ersten Spalte.

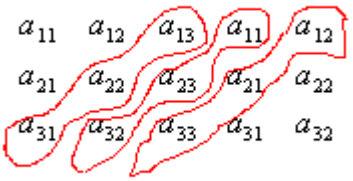
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Von dieser Matrix soll nun die Determinante (det) berechnet werden. Dies deutet man mathematisch durch Betragsstriche um die Matrix an (siehe links).

$$\det A = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \right| \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Bei der Determinantenbestimmung wird der Inhalt der Matrix zunächst noch mal aufgeschrieben (diesmal ohne Klammer), und die ersten beiden Spalten werden noch mal drangehängt. Wir erhalten rechts oben den Ausdruck, der aus 3 Zeilen und 5 Spalten besteht.





In diesem Ausdruck existieren Diagonalen von links oben nach rechts unten (blau bzw. links) und Diagonalen von links unten nach rechts oben (rot bzw. rechts). Die Komponenten innerhalb einer Diagonalen werden multipliziert. Die 3 blauen Diagonalen (D mit Index b) werden addiert und anschließend werden die 3 roten Diagonalen (D mit Index r) addiert. Am Schluss wird die Summe der roten Diagonalen von der Summe der blauen Diagonalen abgezogen. Wir erhalten insgesamt:

$$\det A = \text{Summe der 3 blauen Diagonalen}(\mathrm{D_b}) - \text{Summe der 3 roten Diagonalen}(\mathrm{D_r})$$
$$\det A = [D_{b1} + D_{b2} + D_{b3}] - [D_{r1} + D_{r2} + D_{r3}]$$
$$\det A = [a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}] - [a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} + a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}]$$

Anmerkung: D mit Index b1 bedeutet Multiplikation der Komponenten der ersten blauen Diagonalen

Beispielaufgabe zur Berechnung von Determinanten. Gegeben ist die folgende 3 kreuz 3 Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Den Inhalt der Matrix schreiben wir nochmals auf und wiederholen die ersten beiden Spalten

$$\begin{matrix} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Jetzt müssen wir die Diagonalen multiplizieren und zwar gemäß der Regel:

Diagonalen von links oben nach rechts unten (erste eckige Klammer) minus Diagonalen von rechts oben nach links unten (zweite eckige Klammer). Falls du Probleme hast, die Diagonalen zu sehen, dann schau in die Skizze auf der vorigen Seite.

$$\det A = [3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)] - [(-1) \cdot 3 \cdot 0 + 3 \cdot 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot 2]$$
$$\det A = [18 + 0 - 1] - [0 - 12 - 4]$$
$$\det A = [17] - [-16]$$
$$\det A = 33$$

In der Praxis musst du öfters auch mal die Determinante von einer kleineren, sagen wir einer 2x2-Matrix (sprich 2 kreuz 2 Matrix) berechnen. Merke dir bitte hier einfach nur erste Diagonale minus zweite Diagonale, wobei die erste von links oben nach rechts unten verläuft und die zweite von links unten nach rechts oben. Kurzes Beispiel mit der 2x2-Matrix A (2 Zeilen und 2 Spalten):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A = \left| \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot (-4) - 5 \cdot (-2) = -4 + 10 = 6$$

Bitte merken: Erste Diagonale minus zweite Diagonale