3.7. Matrizenrechnung

3.7.1. Matrizenmultiplikation

Den Ablauf der Multiplikation von 2 Matrizen können wir an zwei 3x3-Matrizzen (sprich drei kreuz drei), also Matrizen mit 3 Zeilen und 3 Spalten, nachvollziehen.

Gegeben sind die beiden Matrizen A und B und gesucht ist deren Kreuzprodukt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad und \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Wenn man diese beiden Matrizen multipliziert, entsteht die neue Matrix C.

$$A \times B = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Komponenten der neuen Matrix C entstehen, indem man mittels Skalarprodukt Zeile mal Spalte rechnet. Dazu folgendes Beispiel für die zweite Komponente in der ersten Zeile. Um diese Komponente zu bestimmen, rechnet man erste Zeile mal zweite Spalte mittels Skalarprodukt (siehe Band 2 Seite 17) aus. Wir erhalten:

$$c_{12} = 1.Zeile * 2.Spalte$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} = c_{12}$$

Beispiel, wobei die erste und die zweite Spalte gegeben sind:

$$c_{12} = 1.Zeile * 2.Spalte$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-5) + 6 \cdot 3 = 3 - 20 + 18 = 1$$

Wenn man sich ein wenig an diese Rechnung gewöhnt hat, kann man Zeile mal Spalte auch im Kopf rechnen, allerdings sollte man sich der Übersichtlichkeit wegen auch hier zumindest Zeile und Spalte als Spaltenvektoren aufschreiben.

Wenn man mithilfe Zeile mal Spalte alle Komponenten berechnet hat, dann erhält man auch die neue Matrix C.

Ergänzend noch ein ganz wichtiger Hinweis:

Die Matrizenmultiplikation ist **<u>nicht</u>** kommutativ d.h. man darf die Matrizen nicht vertauschen, denn:

$$A \times B \neq B \times A$$

Die Matrizenmultiplikation kann man übrigens nicht immer ausführen, sondern nur, wenn die Spaltenanzahl der einen Matrix mit der Zeilenanzahl der anderen Matrix übereinstimmt, denn nur dann kann man den Spruch Zeile mal Spalte anwenden, d.h. das Skalarprodukt bestimmen. Zwei quadratische Matrizen mit gleicher Spalten und Zeilenanzahl, kann man immer ausmultiplizieren.

Die folgende Rechnung ist möglich:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Die folgende Rechnung ist **<u>nicht</u>** möglich

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

Wenn man hier mit Zeile mal Spalte arbeiten will, dann wird man feststellen, dass man bei einem Vektor 2 Komponenten und bei dem anderen Vektor 3 Komponenten hat und dann kann man nicht das Skalarprodukt bilden, weil eine Komponente fehlt.

3.7.2. Inverse Matrix:

Die Inverse Matrix bestimmt man mithilfe des GAUSS-Verfahrens S.60. Das kennst du vielleicht noch vom Lösen von Linearen Gleichungssystemen.

Gegeben ist die Matrix A und gesucht ist die Inverse Matrix, die auch mit A, allerdings mit -1 als Exponenten dargestellt wird.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix stellt man der Einheitsmatrix (eine Matrix, die nur aus Nullen besteht, wobei die Hauptdiagonale aus Einsen besteht) folgendermaßen gegenüber.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Umformungen (Multiplikation und Verrechnungen von Zeilen) versucht man nun, die Einheitsmatrix auf der linken Seite herzustellen und das Ergebnis könnte dann so aussehen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & i_{11} & i_{12} & i_{13} \\ 0 & 1 & 0 & i_{21} & i_{22} & i_{23} \\ 0 & 0 & 1 & i_{31} & i_{32} & i_{33} \end{pmatrix}$$

Auf der rechten Seite kann man dann die Inverse Matrix ablesen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} \end{pmatrix}$$

Diese Inverse Matrix hat folgende verblüffende Eigenschaften

1. Das Kreuzprodukt von Matrix und Inverser Matrix ist kommutativ, man kann also die Reihenfolge vertauschen, was normalerweise nicht möglich ist. Trotz Vertauschung kommt immer die Einheitsmatrix E als Ergebnis raus.

$$A \times A^{-1} = E \qquad und \qquad A^{-1} \times A = E$$

2. Kennt man von der linken Seite eines Gleichungssystems die Inverse Matrix, so erhält man die Lösungen des Linearen Gleichungssystems, wenn man die Inverse Matrix mit der als Vektor dargestellten rechten Seite des Gleichungssystems multipliziert

3. Ausserdem gilt: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$