3.1.6. Horner-Schema

Das Horner-Schema ist eine Alternative zum Lösen von Gleichungen höheren Grades. Vielleicht hast du schon auf Seite 42 den „Werkzeugkasten“ gelesen. Dort wird erklärt, welche Werkzeuge zum Lösen von Gleichungen existieren und wann diese anzuwenden sind. Das letzte Werkzeug ist die Polynomdivision mit dem Linearfaktor (vorige Seite). Wem die Handhabung dieses Werkzeuges nicht zusagt, der kann auch das Horner-Schema benutzen.

Das Horner-Schema ist grundsätzlich geeignet zum Lösen von Gleichungen höheren Grades, nämlich für Gleichungen 3.Grades und höher. Solche Gleichungen sollten aber ein absolutes Glied (im folgenden Beispiel die –24) haben, da man ansonsten zum Lösen der Gleichung nicht das Horner-Schema, sondern ein einfacheres Werkzeug, nämlich Ausklammern, benutzen würde. Eine typische Beispielaufgabe wäre also, wie gesagt, eine Gleichung dritten Grades mit absolutem Glied.

$x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$ Diese Gleichung wird auf der nächsten Seite gelöst !!!

Allgemeine Beschreibung der Vorgehensweise:

Vorbereitung: Fertige eine Tabelle an, die immer 3 Zeilen hat. Die Anzahl der Spalten erhält man, wenn man zum Grad der Gleichung (höchste Potenz) die Zahl 1 addiert.
1. Die rechte Seite der Gleichung sollte Null sein. Falls dies nicht automatisch ist, muss man die Gleichung entsprechend umstellen.
2. **Die Faktoren bzw. Koeffizienten bei den Variablen werden in die erste Zeile der Tabelle eingetragen.** Der erste Wert in der ersten Zeile stellt dann den Faktor (Zahl, die multipliziert wird) bei der höchsten Potenz dar. Die zweite Zahl den Faktor bei der zweithöchsten Potenz usw.. Ganz rechts in der ersten Zeile steht dann aber auch das absolute Glied. Beachte bitte an dieser Stelle, dass, falls eine Potenz fehlt, an dieser Stelle eine Null erscheint. Die erste Zeile würde also bei $5x^3 + 2x - 4 = 0$ die Zahlen 5, 0 , 2 und -4 enthalten. Die Null steht dabei für den fehlenden Ausdruck $0x^2$.
3. Der erste Wert der zweiten Zeile ist immer eine Null und jetzt sollte man sich Gedanken über eine eventuelle Lösung der Gleichung machen. Man muss also zunächst einmal eine Lösung vermuten. **Potentielle Lösungen sind die positiven und negativen Teiler des absoluten Gliedes.**
4. Die Werte in der dritten Zeile erhält man immer durch zusammenzählen der Werte in einer Spalte**. Es wird also senkrecht nach unten addiert.**
5. Die Werte in der zweiten Zeile erhält man durch diagonales multiplizieren. Damit ist gemeint, dass man z.B. den ersten Wert der dritten Spalte mit der vermuteten Lösung multipliziert. Das Ergebnis wird dann in die zweite Zeile eingetragen, allerdings nicht in Spalte 1, sondern in Spalte 2, da man sozusagen diagonal nach rechts oben multipliziert
6. Wenn man sich durch senkrechtes Addieren und diagonales Multiplizieren durch die Tabelle gearbeitet hat, **kommt rechts unten das Ergebnis heraus**. Erscheint eine Null, dann haben wir eine Lösung erhalten. Kommt etwas anderes als Null heraus, dann muss man eine neue Zahl vermuten und mit dieser den gesamten Vorgang wiederholen.
7. Für den Fall das doch Null herausgekommen ist, kann man die unterste Zeile übrigens auch noch entsprechend verwerten. Wenn man diese Zeile nämlich wieder in eine Gleichung zurückverwandelt, dann ist diese Gleichung vom Grad her eins geringer als die Ausgangsgleichung. Diese neue Gleichung kann man nochmals mit Horner-Schema bearbeiten und erhält so weitere Lösungen. Ist diese Gleichung allerdings zweiten Grades, so sollte man zur Bestimmung weiterer Lösungen lieber die pq-Formel anwenden.

Zum besseren Verständnis lösen wir folgende Aufgabe:

$$x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 0$$

Wir fertigen zunächst eine Tabelle an bestehend aus 3 Zeilen und aus 4 Spalten (Grad der Gleichung plus 1). In die erste Zeile tragen wir die Faktoren bzw. Koeffizienten ein. In der zweiten Zeile ist der erste Wert immer Null. Wir erhalten dann die linke Tabelle:

1	3	-10	-24
0			

=>

1	3	-10	-24
0	1	4	-6
1	4	-6	-30

Die rechte Tabelle erhält man folgendermaßen. Zunächst muss man ja einen Wert vermuten, der als Lösung in Frage kommt. Da geht man ja nicht wahllos vor, denn potentielle Lösungen sind ja die positiven und negativen Teiler des absoluten Gliedes. Das absolute Glied ist in unserem Beispiel –24, also kommt als potentielle Lösungen jeweils der positive und negative Wert folgender Zahlen in Betracht: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, denn alle diese Zahlen gehen in die 24. Wir suchen uns jetzt eine Zahl aus, sagen wir die +1. Dann erhält man die Werte in der rechten Tabelle auf folgende Weise. Die Werte in der dritten Spalte erhält man, indem man senkrecht nach unten in einer Spalte addiert. Der erste Wert in der dritten Spalte ist also 1, denn 1 + 0 ist 1. Die Werte in der zweiten Spalte erhält man durch diagonales multiplizieren mit der vermuteten Lösung. Der zweite Wert in der zweiten Spalte erhält man durch Multiplizieren des ersten Wertes der Dritten Spalte (1) mit der vermuten Lösung (+1). 1 mal 1 ist 1 und dieser Wert taucht als zweites in der zweiten Spalte auf. Anschließend wird wieder senkrecht nach unten addiert und so erhält man den zweiten Wert der dritten Spalte, denn 3 + 1 ist 4. Weiter geht's mit diagonalem Multiplizieren mit +1 und wenn man nach diesem Verfahren weitermacht erhält man schließlich rechts unten –30. Da nicht 0 herausgekommen ist, ist +1 keine Lösung der Gleichung, also muss man das Horner-Schema mit einem anderen Wert der potentiellen Lösungen durchführen. Probieren wir doch mal die +3

Zunächst wird wieder die Tabelle links angefertigt und anschließend wieder gefüllt, indem man senkrecht nach unten addiert und diagonal nach rechts oben mit der vermuteten Lösung (diesmal die 3) multipliziert.

1	3	-10	-24
0			

=>

1	3	-10	-24
0	3	18	24
1	6	8	0

Rechts unten erhalten wir diesmal eine Null und deswegen ist die 3 eine Lösung der Gleichung. Die unterste Zeile der rechten Tabelle kann man in folgende Gleichung zurückverwandeln

$$x^2 + 6x + 8 = 0$$

Die Zahlen in der untersten Spalte ergeben also die Faktoren einer Gleichung, die vom Grad her eins geringer ist als die Ausgangsgleichung. Die neue Gleichung kann auch wieder per Horner-Schema angegangen werden, wobei hier pq-Formel besser wäre.