3.1.4. Werkzeug 4: Die Substitution ($x^2 = z$)

Anwendungsgebiet: Gleichungen, in denen x mehrmals mit unterschiedlichen Potenzen vorkommt, wobei jede Potenz gerade ist. Außerdem muss auch ein absolutes Glied vorhanden sein, da sonst Werkzeug 2 funktioniert.

Beispiele: $x^4 + x^2 + 7 = 0$ oder $x^6 - 2x^4 + 4x^2 + 5 = 0$

Vorgehensweise:

Man ersetzt x^2 durch z und versucht den entstehenden Ausdruck mit einem Werkzeug zu lösen. Ist die höchste Potenz 4, dann wird man Werkzeug #3 (pq-Formel siehe Aufgabe 1) benutzen müssen. Ist die höchste Potenz 6 oder höher, wird man Werkzeug #5 (Polynomdivision mit Linearfaktor siehe Aufgabe 2) benutzen müssen.

Nach Anwendung des entsprechenden Werkzeuges (#3 oder #5) erhält man allerdings z-Werte als Lösung. Aus diesen z-Werten muss wegen $x^2 = z$ noch die Wurzel gezogen werden, wobei zu beachten ist, dass (da man eine gerade Wurzel zieht), pro z-Wert 2 Lösungen, nämlich eine positive und eine negative, herauskommen. Ist z allerdings negativ, entsteht daraus kein x-Wert, da man aus einer negativen Zahl die gerade Wurzel nicht ziehen kann.

Aufgabe 1: $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ / Substitution $x^2 = z$

$z^2 + 5z - 36 = 0$ / pq-Formel

Nach Anwendung ergeben sich folgende 2 Lösungen (z-Werte)

$z_1 = 4$ $z_2 = -9$

aufgrund Substitution gilt $x^2 = z$ also:

$x^2 = 4$ / 2.Wurzel	und	$x^2 = -9$ / 2.Wurzel
$x_1 = 2$		nicht definiert, da man aus einer negativen
$x_2 = -2$		Zahl keine gerade Wurzel ziehen kann
		=> keine weiteren Lösungen

Aufgabe 2: $x^6 - 21x^4 + 44x^2 + 576 = 0$ / Substitution $x^2 = z$

$z^3 - 21z^2 + 44z + 576 = 0$ / Polynomdivision mit Linearfaktor

Nach Anwendung ergeben sich folgende 3 Lösungen (z-Werte)

$z_1 = -4$ $z_2 = 9$ $z_3 = 16$

aufgrund Substitution gilt $x^2 = z$ also:

$x^2 = -4$ / 2.Wurzel	$x^2 = 9$ / 2.Wurzel	$x^2 = 16$ / 2.Wurzel
keine weiteren	$x_1 = 3$	$x_3 = 4$
Lösungen	$x_2 = -3$	$x_4 = -4$