3.4. GRENZWERT (Limes)

Was sind Grenzwertberechnungen? Sie tauchen an unterschiedlichen Stellen auf, z.B. bei Beweisen innerhalb der Differential- bzw. Integralrechnung, bei Folgen und Reihen oder eigentlich noch wichtiger bei gebrochen-rationalen Funktionen. Da sie allerdings nur ab und zu vorkommen und von der Schreibweise her sehr ungewöhnlich sind, tun sich die meisten Schüler schwer mit Grenzwertberechnungen.

Wenn wir beim Thema Grenzwert sind, muss man sich im Klaren darüber sein, was der so genannte **„Grenzübergang“** ist. Beim Grenzübergang entfällt der Limes (lim-Zeichen) und man lässt die entsprechende Variable gegen einen bestimmten Wert laufen, d.h. man setzt für die Variable diesen Wert (also die Zahl) ein, gegen die die Variable laufen soll. Sehen wir uns das doch mal an folgendem Beispiel an: Gegeben ist eine Funktion f(x) und man will wissen, wie verhält sich die Funktion (genauer gesagt die y-Werte der Funktion), wenn x gegen 3 läuft.

Grenzübergang

$f(x) = 2x + 4$ => $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} 2x + 4 = 2 \cdot 3 + 4 = 10$

Was bedeutet das ? Wenn x gegen 3 läuft, dann läuft f(x) bzw. y gegen 10. Gehen wir die einzelnen Schritte nochmals durch. Gegeben war eine Funktion f(x). Im Ansatz lassen wir x gegen 3 laufen und dieser Sachverhalt wird mithilfe dem lim-Zeichen dargestellt. Lass dich von der Schreibweise nicht irritieren. Für f(x) setzen wir die Funktion ein und machen anschließend den Grenzübergang. Was passiert dabei? Das lim-Zeichen fällt weg und x wird durch 3 ersetzt, da x ja gegen 3 laufen soll. Den entstehenden Ausdruck müssen wir nun noch ausrechnen und können das Ergebnis dann interpretieren. Dazu weitere Beispiele, in denen Funktionen gegen unterschiedliche Werte laufen sollen, wobei z.B. auch plus oder minus unendlich (umgefallene Acht) auftaucht.

Grenzübergang

$f(x) = \frac{1}{x}$ => $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

In diesem Fall soll die Funktion f(x) gegen plus unendlich laufen. Nach dem Grenzübergang entfällt das lim-Zeichen und x wird durch das unendlich Zeichen (umgefallene acht) ersetzt. Jetzt muss man nur noch darauf kommen, das 1 durch unendlich null ergibt. Wenn man also 1 durch etwas sehr Großes teilt, dann kommt eben etwas sehr Kleines raus, das so klein ist, dass man sagen kann, dass eigentlich null heraus kommt. Zum besseren Verständnis kannst du das mal am Taschenrechner nachvollziehen, indem du nacheinander mehrere Brüche, also Divisionen (geteilt), eingibst und dabei den Nenner (unten) immer größer werden lässt. Du wirst dann merken, dass der Wert des Bruches bei steigendem Nenner immer kleiner wird. Zurück zur Aufgabe. Was bringt uns nun diese Berechnung oder anders gesagt, wie kann man sie interpretieren. Wenn x gegen plus unendlich läuft, dann läuft f(x) bzw. y gegen 0. Diesen Sachverhalt kann man übrigens auch an der Funktion 1 durch x sehen. Je größer x wird, desto mehr nähert sich die Funktion (also die y-Werte) dem Wert Null, also der x-Achse.

Weitere Übungsaufgaben zum Thema Grenzwertberechnung

Grenzübergang

$f(x) = 5^x$ => $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 5^x = 5^\infty = \infty$ => $x \to \infty\,;\, y \to \infty$

=> $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 5^x = 5^{-\infty} = \frac{1}{5^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$ => $x \to -\infty\,;\, y \to 0$

Bei dieser Aufgabe ist ganz rechts das Ergebnis noch mal kurz und bündig zusammengefasst. Bei der ersten Zeile heißt das: Wenn x gegen unendlich läuft, dann läuft y auch gegen unendlich. Es ist eine übersichtliche Darstellung des vorher berechneten Zusammenhanges, die insbesondere bei der Kurvendiskussion von gebrochen-rationalen Funktionen empfehlenswert ist. In der zweiten Zeile ist ein Schritt vielleicht sonderbar. Es taucht nämlich ein negativer Exponent (- unendlich) auf und dieser sorgt dafür, dass 5 hoch unendlich auf einmal im Nenner auftaucht. Dies ist eine ganz normale Potenzregel. Bei Problemen mit dieser Umformung schau doch einfach mal dort vorbei.

Grenzübergang

$f(x) = 0{,}5^x$ => $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 0{,}5^x = 0{,}5^\infty = 0$ => $x \to \infty\,;\, y \to 0$

=> $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 0{,}5^x = 0{,}5^{-\infty} = \frac{1}{0{,}5^\infty} = \infty$ => $x \to -\infty\,;\, y \to \infty$

Bei dieser Aufgabe ist ungewöhnlich, dass 0,5 hoch unendlich 0 ergibt. Woran liegt das? Auch hier hilft der Taschenrechner. Wenn man 0,5 mal 0,5 eintippt, erhält man 0,25 als Lösung. Das Ergebnis ist also kleiner geworden. Dann ist auch logisch, dass, wenn man 0,5 hoch unendlich berechnet, was ja 0,5 mal 0,5 mal 0,5 usw. bedeutet, eine immer kleinere Zahl heraus kommt, die schließlich so klein ist, dass man sagen kann, dass sie Null ist. Sie ist nicht wirklich Null, aber sehr dicht dran. **Der gerade beschriebene Vorgang ist übrigens bei allen Zahlen zwischen null und eins so.**

Wie kann man sich aber erklären, dass bei der zweiten Aufgabe y gegen unendlich läuft. Es sollte klar sein, wie man zu dem Ausdruck 1 durch 0,5 hoch unendlich kommt. Im vorigen Absatz haben wir festgestellt, dass 0,5 hoch unendlich sehr klein ist. 1 durch etwas sehr Kleines ist aber sehr groß sprich unendlich. Falls du das nicht glaubst, kannst du auch das mit Hilfe des Taschenrechners klären. Auch hier muss wieder ein Bruch, also eine Division eingegeben werden. Diesmal muss der Nenner (unten) allerdings immer kleiner werden. Du wirst feststellen, dass der Wert des Bruches immer größer wird, je kleiner der Nenner wird. Bevor wir jetzt weiterrechnen, machen wir uns einige Gedanken zum Thema unendlich.

Alles unendlich oder was ??? (Rechentipps für unendlich)

Unendlich plus 2 ist unendlich. Unendlich mal 2 ist unendlich. Unendlich hoch zwei ist unendlich. 2 hoch unendlich ist unendlich. **Aber Vorsicht:** Unendlich minus unendlich ist nicht null und unendlich durch unendlich ist nicht eins. **Begründung:** Unendlich ist nicht immer gleich unendlich. Ich hoffe ich habe Euch jetzt nicht verwirrt. Schaut euch die folgenden Aufgaben an!!

Weitere Beispiele zum Thema Grenzwertberechnung

In der folgenden Aufgabe wird ein Fehler gezeigt, der dir nicht passieren sollte:

$$f(x)=\frac{4x^2+5x+6}{2x^2} \quad => \quad \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x+6}{2x^2}=\frac{4\cdot\infty^2+5\cdot\infty+6}{2\cdot\infty^2}=\frac{\infty}{\infty}=1=\mathit{falsch}$$

Hast du den Fehler gefunden? Eigentlich sieht doch alles ganz logisch aus. Wenn du den letzten Absatz auf der vorigen Seite aufmerksam gelesen hast, fällt dir allerdings auf, dass unendlich durch unendlich ja gar nicht 1 ergibt, da das unendlich im Zähler nicht das gleiche unendlich wie im Nenner ist. Wir müssen die Aufgabe also anders angehen. Dabei gibt es 4 Möglichkeiten. Man kann vor dem Grenzübergang den Bruch umformen und zwar entweder durch ausklammern (1), durch ich sag mal „aufdröseln“ (2) oder durch Teilen mit der höchsten Potenz (3). **Die einfachste Möglichkeit (4) wird auf der nächsten Seite erklärt.**

Möglichkeit (1): Man versucht die höchste Potenz des gesamten Bruch auszuklammern, und zwar im Zähler und im Nenner. Im Beispiel allerdings nur im Zähler. Das Ausklammern ist hier auch etwas ungewöhnlich, da man was ausklammern soll, das gar nicht in jedem Teil drin steckt. Das müssen Sie üben. Es empfiehlt sich auch nach dem Ausklammern die Probe zu machen. Wenn man nämlich die Klammer ausmultipliziert, dann muss der frühere Ausdruck wieder entstehen. Anschließend wird das Ausgeklammerte weggekürzt.

$$f(x)=\frac{4x^2+5x+6}{2x^2}=\frac{x^2\cdot(4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})}{2x^2}=\frac{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{2}$$

Nach dieser Vereinfachung wird nun der Grenzwert gebildet (hier x gegen unendlich):

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{2}=\frac{4+\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}}{2}=\frac{4+0+0}{2}=\frac{4}{2}=2 \qquad => \qquad x\to\infty\ ;\ y\to 2$$

Möglichkeit (2): Man verändert den Bruch, indem man ihn „aufdröselt“. Was damit gemeint ist, seht ihr in der folgenden Rechnung. Es ist eine gültige Umformung von Brüchen, die uns in dieser Situation weiterhilft. Anschließend wird auch hier gekürzt. Das „Aufdröseln“ ist übrigens aus dem Grund notwendig, da vor dem „Aufdröseln“ kein kürzen möglich ist, danach aber schon.

$$f(x)=\frac{4x^2+5x+6}{2x^2}=\frac{4x^2}{2x^2}+\frac{5x}{2x^2}+\frac{6}{2x^2}=2+\frac{5}{2x}+\frac{6}{2x^2}$$

Nach dieser Umformung wird nun der Grenzwert gebildet (hier x gegen unendlich):

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} 2+\frac{5}{2x}+\frac{6}{2x^2}=2+\frac{5}{2\cdot\infty}+\frac{6}{2\cdot\infty^2}=2+\frac{5}{\infty}+\frac{6}{\infty}=2+0+0=2 \text{ wie oben !!!}$$

Möglichkeit (3) Jeder Teil des Terms wird durch die Variable mit dem höchsten Exponenten geteilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x+6}{2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{2}=\frac{4+0+0}{2}=2 \quad \text{wie oben !!!}$$

Die einfachste und beste Möglichkeit (4): Man konzentriert sich im Zähler und im Nenner nur auf die höchste Potenz und vereinfacht den Bruch durch kürzen:

$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+5n+6}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{2} = 2$ **wie bei allen anderen Möglichkeiten**

Diese einfache Rechnung lässt sich auch auf andere Fälle übertragen:
In den folgenden Rechnungen geht es jeweils um die Berechnung der Ansätze:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$,

Beispiel 1: $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ zunächst kann man den Bruch vereinfachen, indem man sich sowohl im Zähler als auch im Nenner nur auf die höchste Potenz konzentriert. Wir erhalten dann folgenden Ausdruck, bei dem wir dann kürzen:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$$

In diese stark vereinfachte Funktion setzen wir gedanklich einmal plus unendlich und einmal minus unendlich ein und erhalten dann Folgendes:

$$x \to +\infty \qquad y \to 0^+ \qquad und \qquad x \to -\infty \qquad y \to 0^-$$

Wenn der Nenner eines Bruches nämlich immer größer wird, dann wird der Wert des Bruches immer kleiner und schließlich Null.

Beispiel 2: $f(x) = \frac{6x+1}{2x+3}$ zunächst kann man auch hier den Bruch vereinfachen, indem man sich sowohl im Zähler als auch im Nenner nur auf die höchste Potenz konzentriert. Wir erhalten dann folgenden Ausdruck, bei dem wir dann kürzen:

$$f(x) = \frac{6x+1}{2x+3} = \frac{6x}{2x} = \frac{6}{2} = 3$$

In diese stark vereinfachte Funktion setzen wir gedanklich einmal plus unendlich und einmal minus unendlich ein und erhalten dann Folgendes (nicht dadurch verwirren lassen, dass kein x zum Einsetzen vorhanden ist):

$$x \to +\infty \qquad y \to 3 \qquad und \qquad x \to -\infty \qquad y \to 3$$

Wenn man in die vereinfachte Funktion plus unendlich oder minus unendlich einsetzt, erhält man immer den Wert 3.

Beispiel 3: $f(x) = \frac{4x^2+7}{2x+3}$ zunächst kann man auch hier den Bruch vereinfachen, indem man sich sowohl im Zähler als auch im Nenner nur auf die höchste Potenz konzentriert. Wir erhalten dann folgenden Ausdruck, bei dem wir dann kürzen:

$$f(x) = \frac{4x^2+7}{2x+3} = \frac{4x^2}{2x} = 2x$$

In diese stark vereinfachte Funktion setzen wir gedanklich einmal plus unendlich und einmal minus unendlich ein und erhalten dann Folgendes:

$$x \to +\infty \qquad y \to +\infty \qquad und \qquad x \to -\infty \qquad y \to -\infty$$

Wenn man z.B. plus unendlich in die vereinfachte Funktion einsetzt erhält man plus unendlich.

Weitere Übungsaufgaben zum Thema Grenzwertberechnung:

Auch in dieser Aufgabe wird ein Fehler gezeigt, den du hoffentlich nicht machst:

$$f(x) = e^{2x} - 2 \cdot e^{x} \quad => \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^{2x} - 2 \cdot e^{x} = e^{2 \cdot \infty} - 2 \cdot e^{\infty} = \infty - \infty = 0 = falsch$$

Hast du den Fehler entdeckt, obwohl auch hier eigentlich alles passt? Richtig: Es geht wieder um das ominöse unendlich. Unendlich minus unendlich ist nicht null, denn das erste unendlich ist ein anderes unendlich als das hintere. Unendlich ist nicht immer gleich unendlich. Auch hier muss man vor dem Grenzübergang Ausklammern. Vor dem Ausklammern muss man allerdings noch bei dem ersten Teil der Funktion eine Umformung durch Anwendung einer Potenzregel S.37 machen.

$$f(x) = e^{2x} - 2 \cdot e^{x} = (e^{x})^{2} - 2 \cdot e^{x} = e^{x} \cdot \left(e^{x} - 2\right)$$

Jetzt kann man den Grenzwert bilden:

$$\lim_{x \to \infty} e^{x} \cdot \left(e^{x} - 2\right) = e^{\infty} \cdot \left(e^{\infty} - 2\right) = \infty \cdot (\infty - 2) = \infty \quad => \quad x \to \infty \,;\, y \to \infty$$

Zum Abschluss noch ein Beispiel, wie es bei gebrochen-rationalen Funktionen vorkommt:

$f(x) = \dfrac{-2x}{x-4}$ Diese Funktion hat bei x = 4 eine Definitionslücke (Polstelle)

Wer sich noch nicht mit dieser Funktionsart auskennt, muss das an dieser Stelle eben einfach mal so hinnehmen. Entscheidend ist, dass man gerne wissen möchte, wie sich die Funktion in der direkten Umgebung der Polstelle verhält, genauer gesagt, was machen die y-Werte, wenn man sich x der 4 einmal aus dem positiven Bereich und einmal aus dem negativen Bereich annähert. Wir nähern uns der 4 aus dem positiven Bereich. Mathematisch:

$$\lim_{x \to 4^{+}} f(x) = \lim_{x \to 4^{+}} \frac{-2x}{x-4} = \frac{-2 \cdot 4^{+}}{4^{+} - 4} = \frac{-8}{sehr klein, aber\ positiv} = -\infty$$

Wir nähern uns jetzt der 4, aber aus dem negativen Bereich

$$\lim_{x \to 4^{-}} f(x) = \lim_{x \to 4^{-}} \frac{-2x}{x-4} = \frac{-2 \cdot 4^{-}}{4^{-} - 4} = \frac{-8}{sehr\ klein, aber\ negativ} = \infty$$

Aus den beiden Rechnungen ergibt sich als nützliche Hinweise zum Zeichnen der Funktion

$$x \to 4^{+} \,;\, y \to -\infty \qquad\qquad x \to 4^{-} \,;\, y \to \infty$$

Hinweise zur Rechnung: Der Nenner ist hier interessant. Wenn ich mich der 4 aus dem positiven nähere, wie im Fall 1, dann heißt das, dass man für x z.B. 4,0000001 einsetzt und dann kommt man darauf, dass der Nenner *sehr klein, aber positiv* ist. Im Fall 2 nähern wir uns der 4 von der negativen Seite, d.h. man setzt für x z.B. 3,9999999 ein. Daraus ergibt sich dann, dass der Nenner *sehr klein, aber negativ* ist.