2.5. Wurzelgesetze

Was heißt denn überhaupt wurzelziehen? $\sqrt{9}$ bedeutet, dass man eine Zahl finden soll, die mit sich selber malgenommen den Radikanten, also die 9, ergibt. Ergebnis ist also die 3, weil drei mal drei eben neun ergibt. Beim Wurzelziehen ist es also hilfreich, wenn man das kleine oder besser noch das große Einmaleins beherrscht.

Beispiele: $\sqrt{81} = 9$ $\sqrt{144} = 12$ $\sqrt{1} = 1$ $\sqrt{0} = 0$

Wenn man weiß, dass neun mal neun einundachtzig ergibt, dann kann man das sogar ohne Taschenrechner. Oft wird man aber ohne Taschenrechner nicht weiterkommen wie z.B. bei der Wurzel aus zwei.

Hinweis: Beachte auch die Hinweise zum Wurzelziehen im Kapitel Werkzeugkasten insbesondere im Abschnitt Werkzeug #1 S.43 (einfach nach x auflösen).

Anmerkung: Aus einer negativen Zahl kann man nicht die Wurzel (genauer die zweite Wurzel) ziehen, denn jede Zahl mit sich selber mal genommen ergibt eine positive Zahl.

Beispiel: $\sqrt{-9} = \textit{nicht definiert}$

Es existiert keine Zahl, die mit sich selber mal genommen minus neun ergibt, da wie oben bereits erwähnt minus mal minus plus ergibt.

Rechengesetze für Wurzeln: Wurzeln auseinander ziehen bzw. zusammenfassen

Multiplikation:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \qquad \sqrt{9 \cdot x^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^2} = 3 \cdot x$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \qquad \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

Division:

$$\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b} \qquad \sqrt{16 : y^4} = \sqrt{16} : \sqrt{y^4} = 4 : y^2$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b} \qquad \sqrt{75} : \sqrt{3} = \sqrt{75 : 3} = \sqrt{25} = 5$$

Brüche:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Vorsicht: Bei der Addition und Subtraktion funktioniert obige Vereinfachung nicht!!!

Strichrechnung: $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ und $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$

Merke: Auseinanderziehen und Zusammenfassen von Wurzeln ist bei Addition und Subtraktion *nicht* erlaubt.

Noch ein Hinweis zum Vereinfachen von Wurzelausdrücken durch Kürzen

$$\sqrt[m\cdot n]{a^{k\cdot n}} = \sqrt[m]{a^{k}} \qquad \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x^1}$$

Grundlage dafür, dass an dieser Stelle Kürzen erlaubt ist, ist folgende Regel

$$\sqrt[m]{a^{n}} = a^{\frac{n}{m}} \qquad \sqrt[6]{x^2} = x^{\frac{2}{6}} = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^1}$$

Die Regel funktioniert natürlich auch umgekehrt, d.h. eine Zahl mit einem Bruch als Exponenten kann man auch als Wurzel schreiben, indem man diese Zahl unter die Wurzel schreibt und anschließend die Vorstellung hat, dass der Bruch von oben auf die Wurzel fällt und dabei der Nenner vorne an der Wurzel hängen bleibt und der Zähler in die Wurzel hüpft. Wem dies zu abwegig ist, der muss sich das halt irgendwie anders merken.

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^{n}} \qquad x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$$

Nochmals zur Erklärung: x hat einen Bruch als Exponenten. Deshalb kann man diesen Ausdruck auch als Wurzel schreiben. Das x kommt also unter die Wurzel und man stellt sich nun vor, dass der Bruch von oben auf die Wurzel fällt. Der Nenner, also die 4, bleibt an der Wurzel vorne hängen und die 3 springt in die Wurzel rein und wird zum Exponenten von x.

Aus voriger Regel erklärt sich auch, dass hoch 0,5 bzw. ½ nichts anderes ist, als normales wurzelziehen:

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x^1} = \sqrt{x}$$

Zum Abschluss noch einige Beispielaufgaben, wie sie in Arbeiten immer wieder vorkommen:

Forme so um, dass unter der Wurzel kein Bruch mehr auftaucht:

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}$$

Vereinfache folgenden Ausdruck:

$$\sqrt{50} = \sqrt{2\cdot 25} = 5\cdot\sqrt{2}$$

Bringe die Zahl vor der Wurzel unter die Wurzel

$$3\cdot\sqrt{5} = \sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{3^2\cdot 5} = \sqrt{9\cdot 5} = \sqrt{45}$$