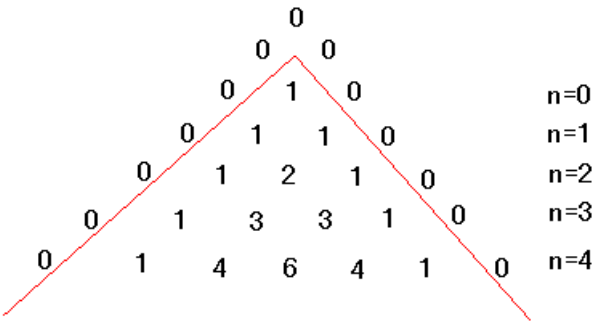
3.5. Pascal'sches Dreieck

Insgesamt gibt es 2 Konstruktionsmöglichkeiten und aus jeder dieser Konstruktionsmöglichkeiten ergibt sich eine eigene Anwendungsmöglichkeit

Konstruktionsmöglichkeit 1:

Schreibe eine 1 auf. Gedanklich stehen links und rechts neben der 1 Nullen.
Die nächste Zeile ergibt sich, indem man die 1 mit der 0 rechts daneben addiert und anschließend die 1 mit der 0 links daneben addiert. Die Ergebnisse werden in die nächste Zeile geschrieben, allerdings zwischen die beiden Summanden, die man addiert hat. Man addiert also 2 Zahlen und schreibt das Ergebnis zwischen die beiden Zahlen, allerdings eine Zeile tiefer. Verfährt man nach diesem Verfahren immer weiter, so entsteht ein immer größer werdendes Dreieck.



Anwendung:

Mit dem Pascal'schen Dreieck können Sie Ausdrücke der Art $(a+b)^n$ berechnen.

Ein Beispiel mit n = 3, a = x und b = y also: $(x+y)^3$ (Anmerkung: n = 2 wäre Binom)

1. Schreibe die beiden Summanden a und b 4-mal, also (n+1)-mal, als Produkt auf. Verbinde die 4 Multiplikationen mit Pluszeichen:

$$xy + xy + xy + xy$$

2. Jetzt geht es an die Exponenten. Beim x beginnen wir mit dem Exponenten 3 (n) und verringern nach hinten raus immer um 1. Bei y beginnen wir mit dem Exponenten 0 und erhöhen nach hinten raus immer um 1.

$$x^3y^0 + x^2y^1 + x^1y^2 + x^0y^3 \quad => \quad x^3 + x^2y^1 + x^1y^2 + y^3$$

3. y hoch 0 und x hoch 0 ist ja jeweils 1 und wenn 1 in einer Multiplikation drin ist, fällt die 1 dann weg (rechts). Jetzt schauen wir im Pascal'schen Dreieck in der n = 3 Zeile nach und sehen dort die Koeffizienten 1, 3, 3, 1. Das sind die Koeffizienten der 4 Summanden. Wir erhalten:

$$1x^3 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1y^3 \quad => \quad x^3 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + y^3$$

Konstruktionsmöglichkeit 2:

Das Pascal'sche Dreieck besteht aus den einzelnen Binomialkoeffizienten, die man in den Taschenrechner mit der nCr-Taste berechnen kann.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Anwendung:

Man kann den Wert eines Binomialkoeffizienten ablesen:

Sagen wir 4 über 2: $\binom{4}{2}$

Man muss dann in der 4. Zeile und dann in der 2.Spalte nachsehen. **Beim Zählen der Spalten und Zeilen muss man allerdings mit der Null beginnen.** Beim Binomialkoeffizienten steht also oben der Zeilenindex und unten der Spaltenindex. Wenn wir richtig schauen, dann müssten wir auf das Ergebnis 6 kommen. Per Taschenrechner erhalten sie das gleiche Ergebnis, wenn wir 4 nCr 2 eingeben.