4.4. Normalverteilung

Die Normalverteilung ist für die praktische Anwendung sehr wichtig, da **zum Einen** viele Zufallsgrößen wie z.B. Intelligenz, Körpergröße oder auch messbare Produktionsfehler normalverteilt. Vor allem Zufallsgrößen, die von mehreren unabhängigen Faktoren abhängen, sind normalverteilt. Je mehr unabhängige Faktoren, desto ähnlicher ist die Verteilung der Normalverteilung. **Zum anderen** ersetzt die Normalverteilung andere Verteilungen wie z.B. die Binomialverteilung (S.158) oder die POISSON-Verteilung (S.163) unter bestimmten Voraussetzungen, aber vor allem dann, wenn die Anzahl n der Versuchswiederholungen sehr groß ist und die Verteilung symmetrisch ist. Die Binomialverteilung ist z.B. bei der Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,5 symmetrisch und dann ist die Normalverteilung eine gute Annäherung der Binomialverteilung, denn die Normalverteilung ist immer symmetrisch um den Erwartungswert bzw. Mittelwert verteilt.

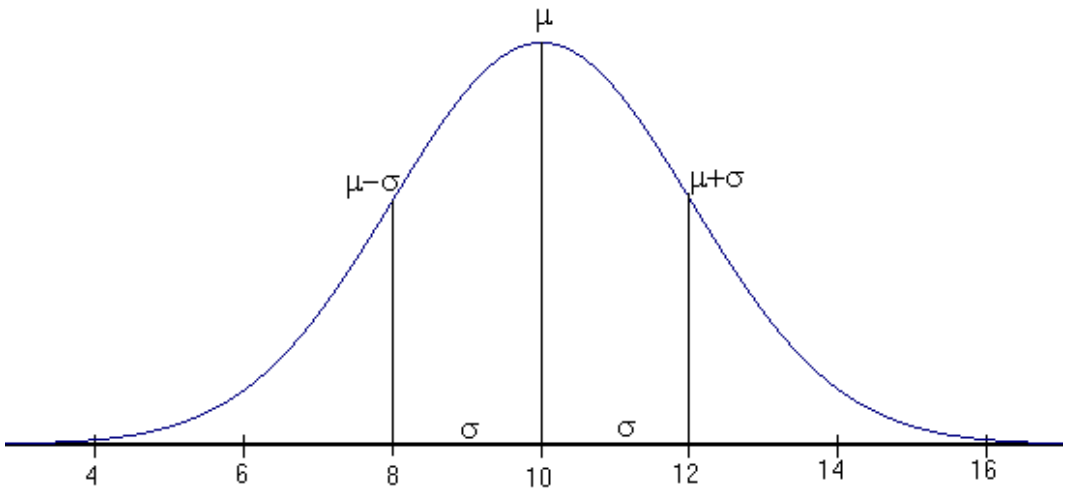
Wie sieht nun die Normalverteilung aus? Die Normalverteilung bezeichnet man auch als Glockenfunktion (siehe Grafik unten), die man mit der so genannten Dichtefunktion erhält

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

mit

$f(x)$ = Wahrscheinlichkeit der Zufallsgröße x
x = Wert der Zufallsgröße x
μ = Erwartungswert / Mittelwert
σ = Standardabweichung
e = Eulersche Zahl 2,71...
π = Kreiszahl 3,14...

Schauen wir uns die graphische Darstellung einer Normalverteilung an, bei der wir für den Erwartungswert μ den Wert 10 und für die Standardabweichung σ den Wert 2 annehmen

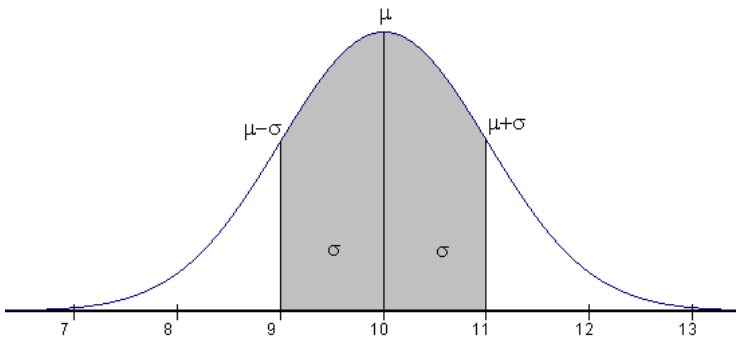


Wir sehen, dass die Normalverteilung symmetrisch um den Erwartungswert μ verläuft. Die Glockenkurve ist stetig und eingipfelig. Der Gipfel, also das Maximum, ist bei dem Erwartungswert μ erreicht. Die Wendepunkte liegen eine Standardabweichung σ links und rechts vom Erwartungswert μ.

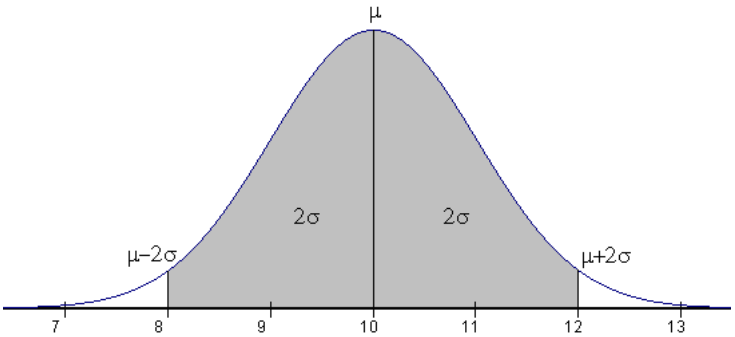
4.4.1. Normalverteilung und Standardabweichung

Weicht man von dem Erwartungswert μ eine bestimmte Anzahl von Standardabweichungen σ ab, so erhält man Teilabschnitte der Normalverteilung, die immer eine bestimmte Wahrscheinlichkeit repräsentieren. Die gesamte Fläche, also von minus bis plus unendlich, unterhalb der Normalverteilung stellt die Wahrscheinlichkeit 1 bzw. 100 % dar.

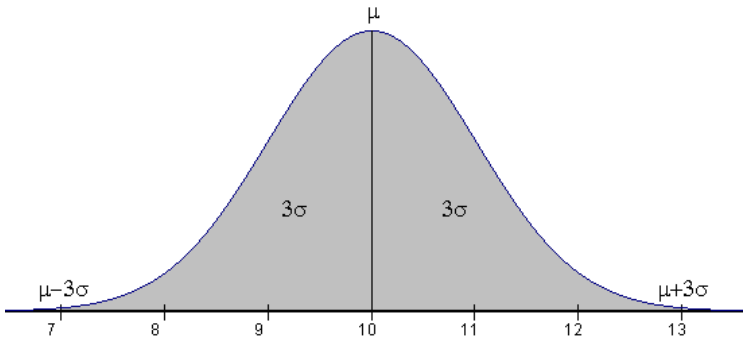
Die erste Skizze betrachtet den Bereich einer Standardabweichung σ links und rechts vom Erwartungswert μ und stellt 68,27 % dar:



Die zweite Skizze betrachtet den Bereich zweier Standardabweichungen σ links und rechts vom Erwartungswert μ und stellt 95,45 % dar:

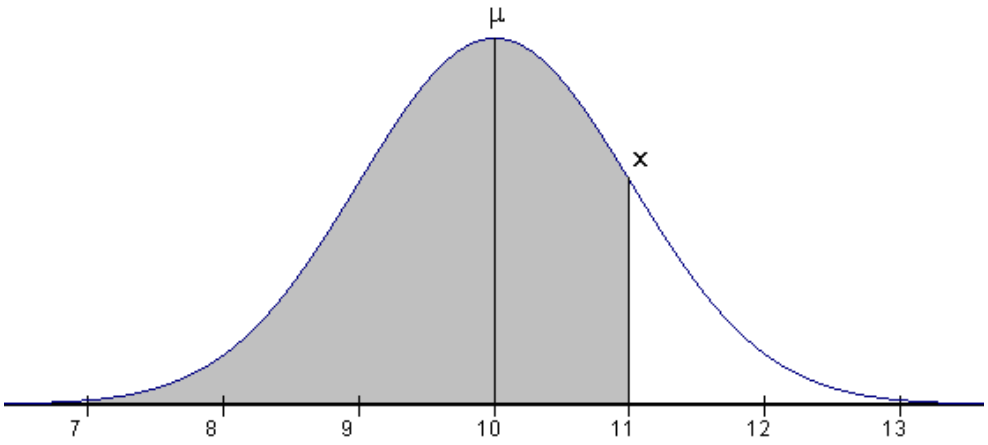


Die dritte Skizze betrachtet den Bereich dreier Standardabweichungen σ links und rechts vom Erwartungswert μ und stellt 99,74 % dar:



4.4.2. Flächen unterhalb der Normalverteilung

An der Normalverteilung können wir auch Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Werte einer Zufallsgröße ablesen. Wir wählen auf der x-Achse einen Wert für die Zufallsgröße x und der Funktionswert (y-Wert) an dieser Stelle liefert uns die Wahrscheinlichkeit für die ausgewählte Zufallsgröße. Richtig interessant wird die Normalverteilung aber erst, wenn man Wahrscheinlichkeiten für ganze Bereiche der Zufallsgröße berechnet. In diesem Fall wählt man für die Zufallsgröße x einen ganzen Bereich der x-Achse aus. Sagen wir von minus Unendlich bis zu einem bestimmten Wert x der Zufallsgröße.



Die grün markierte Fläche ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße Werte kleiner gleich dieser ausgewählten Zufallsgröße x annimmt, und diese Wahrscheinlichkeit kann man mit folgender Verteilungsfunktion F(x) berechnen.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

mit

$F(x)$ = Wahrscheinlichkeit der Zufallsgröße ≤ x

x = Wert der Zufallsgröße x

μ = Erwartungswert / Mittelwert

σ = Standardabweichung

e = Eulersche Zahl 2,71...

π = Kreiszahl 3,14...

Diese Formel ist eigentlich einfach nur das bestimmte Integral der Dichtefunktion in dem Intervall von minus unendlich bis zu einem bestimmten x, deswegen erhalten wir so auch die Wahrscheinlichkeit für die Zufallsgröße kleiner gleich x. Das bestimmte Integral findet hier übrigens seine Anwendung, denn die Fläche unter der Dichtefunktion stellt ja eine Wahrscheinlichkeit dar.

Mit dieser Formel kann man auf jeden Fall die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass die Zufallsgröße Werte kleiner gleich einem bestimmten Wert x annimmt. In der Praxis werden Wahrscheinlichkeiten der Normalverteilung auch oft mit Tabellen bestimmt, in denen allerdings so genannte z-Werte auftauchen. Wie man zu diesen z-Werten kommt und was man mit ihnen anstellen kann, siehst du auf den folgenden Seiten.

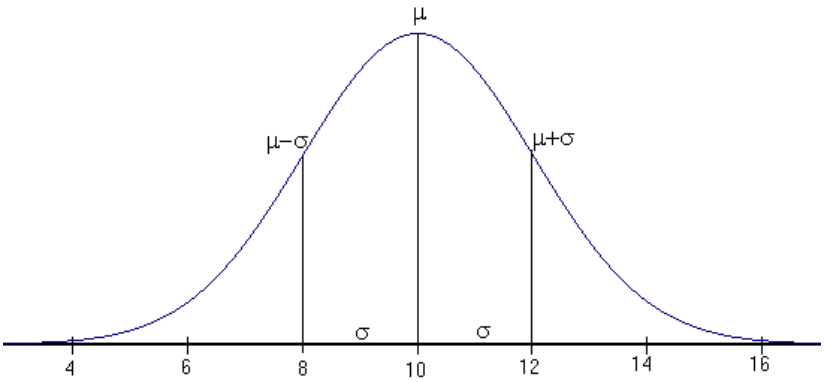
4.4.3. Normalverteilung und z-Transformation

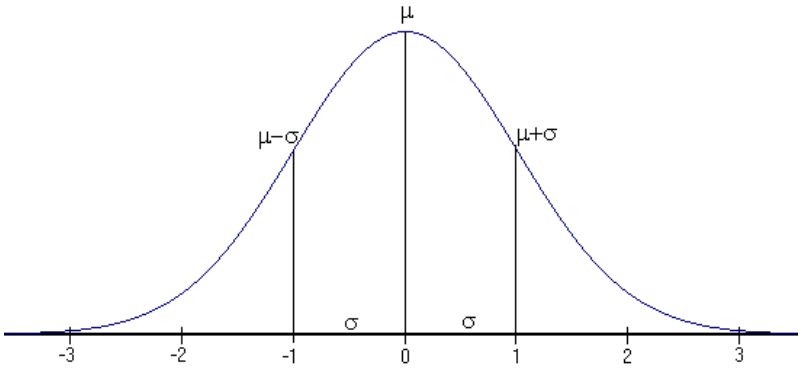
Mithilfe der z-Transformation kann man eine Normalverteilung in die so genannte Standardvormalverteilung verwandeln. Die Standardnormalverteilung ist eine Normalverteilung mit besonderen Eigenschaften, denn sie hat den Erwartungswert μ = 0 und die Standardabweichung σ = 1. Bei der z-Transformation wird die Zufallsgröße x in z-Werte transformiert und zwar mit folgender Formel:

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{x-E(x)}{S(x)} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} z &= \text{z - Wert} \\ x &= \text{Zufallsgröße x} \\ \mu &= \text{Erwartungswert E(x)} \\ \sigma &= \text{Standardabweichung (S(x)} \end{aligned}$$

Wenn wir also die Werte der Zufallsgröße x in die Formel einsetzen, erhalten wir als Ergebnis z-Werte und dadurch wird die Normalverteilung in die Standardnormalverteilung umgewandelt.

Damit du das besser verstehst, schau dir die beiden folgenden Skizzen genau an. Die erste Skizze kennst du schon als Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ = 10 und der Standardabweichung σ = 2





Man erkennt, dass in der zweiten Skizze die x-Achse jetzt nicht mehr die Zufallsgröße x darstellt, sondern die Zufallsgröße x wurde mithilfe obiger Formel in z-Werte umgewandelt (transformiert). Rechne doch mal selbst einige x-Werte in z-Werte um. Beachte weiterhin, dass der Erwartungswert jetzt 0 und die Standardabweichung 1 beträgt.

Was bringt jetzt die z-Transformation?

Erinnerst du sich noch an die Dichtefunktion f(x) und die Verteilungsfunktion F(x). Falls nicht, so zeige ich sie dir an dieser Stelle noch mal:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

mit

$f(x)$ = Wahrscheinlichkeit der Zufallsgröße x
x = Wert der Zufallsgröße x
μ = Erwartungswert / Mittelwert
σ = Standardabweichung
e = Eulersche Zahl 2,71...
π = Kreiszahl 3,14...

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} dx$$

mit

$F(x)$ = Wahrscheinlichkeit der Zufallsgröße $\leq$ x
x = Wert der Zufallsgröße x
μ = Erwartungswert / Mittelwert
σ = Standardabweichung
e = Eulersche Zahl 2,71...
π = Kreiszahl 3,14...

Die z-Transformation wandelt ja jede Normalverteilung in eine Standardnormalverteilung um, deren Erwartungswert μ = 0 und deren Standardabweichung σ = 1 ist. Setzen wir doch mal diese Werte in die Dichtefunktion f(x) und die Verteilungsfunktion F(x) ein, so erhalten wir:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-0,5z^2}$$

mit

$f(z)$ = Wahrscheinlichkeit der transf. Zufallsgröße x
z = transformierte Zufallsgröße x
μ = Erwartungswert / Mittelwert = 0
σ = Standardabweichung = 1
e = Eulersche Zahl 2,71...
π = Kreiszahl 3,14...

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z} e^{-0,5z^2} dz$$

mit

$F(z)$ = Wahrscheinlichkeit der Zufallsgröße $\leq z$
z = transformierte Zufallsgröße x
μ = Erwartungswert / Mittelwert = 0
σ = Standardabweichung = 1
e = Eulersche Zahl 2,71...
π = Kreiszahl 3,14...

Damit man nicht immer die Formel ausrechnen muss, hat man **Tabellen** (siehe nächste Seite) angefertigt, mit deren Hilfe man die jeweils gesucht Fläche unter der Standardnormalverteilung bestimmen kann.

4.4.4. Tabellen für z-Werte bei der Normalverteilung

Die folgende Tabelle liefert uns die Fläche von minus unendlich bis zu einem bestimmen **negativen z-Wert** oder anders ausgedrückt die Fläche links von einem **negativem z-Wert.**

-z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0,1	4602	4562	4522	4483	4443	4404	4364	4325	4286	4247
0,2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0,3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0,4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3192	3156	3121
0,5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0,6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2546	2514	2483	2451
0,7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0,8	2119	2090	2061	2033	2005	1977	1949	1922	1894	1867
0,9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1,0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1379
1,1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1,2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
1,3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
1,4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
1,5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
1,6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
1,7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
1,8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
1,9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
2,0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
2,1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
2,2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
2,3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
2,4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
2,5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
2,6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
2,7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
2,8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0019
2,9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
3,0	0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
3,1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007
3,2	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005

Für den z-Wert -2,3 erhält man als Tabellenwert 0,0107 und für den z-Wert -2,31 erhält man den Tabellenwert 0,0104. Die Fläche links des z-Wertes -2,42 beträgt z.B. 0,0078. Um auf diesen Wert zu kommen, muss man in der ersten Spalte zu 2,4 gehen und anschließend in die dritte Spalte wechseln, da die Zahlen in der ersten Zeile die zweite Zahl nach dem Komma darstellt.

Die folgende Tabelle liefert uns die Fläche von minus unendlich bis zu einem bestimmen **positiven z-Wert** oder anders ausgedrückt die Fläche links von einem **positivem z-Wert.**

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9986	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995

Die Fläche links vom z-Wert +2,1 beträgt 0,9821 und links vom z-Wert 2,11 ist die Fläche 0,9826. Die Fläche links vom z-Wert +2,92 beträgt 0,9982.

Übungen zum Umgang mit den Tabellen

Bei den folgenden Übungsaufgaben musst du zunächst mithilfe der z-Transformation die Zufallsgrößen x in z-Werte umwandeln.

Ist die Zufallsgröße kleiner gleich einem bestimmten z-Wert, dann können wir die Lösung direkt aus der Tabelle ablesen.

Ist die Zufallsgröße größer gleich einem bestimmten z-Wert, dann hilft die Symmetrie der Normalverteilung weiter.

Stellt die Zufallsgröße ein anderes Intervall dar, so müssen wir beide Intervallsgrenzen in der Tabelle ablesen und von der größeren Fläche die kleinere abziehen.

Versuche doch einmal auf folgende Werte zu kommen:

Die Körpergröße ist normalverteilt und zwar mit dem Erwartungswert $\mu = 180$ cm und der Standardabweichung $\sigma = 15$ cm

Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand höchstens 165 cm groß ist, beträgt 15,87 %
Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand mindestens 195 cm groß ist, beträgt 15,87 %
Die Wahrscheinlichkeit, dass man zwischen 180 cm und 195 cm groß ist, beträgt 35,13 %

Die Tatsache, dass eine chemische Reaktion eine 80prozentige Ausbeute liefert, ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 150$ Minuten und der Standardabweichung $\sigma = 30$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reaktion zwischen 150 und 175 Minuten die erwartete Ausbeute liefert (Lösung 30 %)?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reaktion zwischen 125 und 150 Minuten die erwartete Ausbeute liefert (Lösung 30 %)?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reaktion zwischen 140 und 170 Minuten die erwartete Ausbeute liefert (Lösung 37,79 %)?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reaktion zwischen 165 und 190 Minuten die erwartete Ausbeute liefert (Lösung 21,67 %)?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reaktion bis 185 Minuten die erwartete Ausbeute liefert (Lösung 87,9 %)?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reaktion über 195 Minuten die erwartete Ausbeute liefert (Lösung 6,68 %)?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Reaktion über 85 Minuten die erwartete Ausbeute liefert (Lösung 98,5 %)?

Die Intelligenz ist übrigens auch normalverteilt und zwar mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ und der Standardabweichung $\sigma = 15$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand einen überdurchschnittlichen Intelligenzquotienten von über 130 hat?